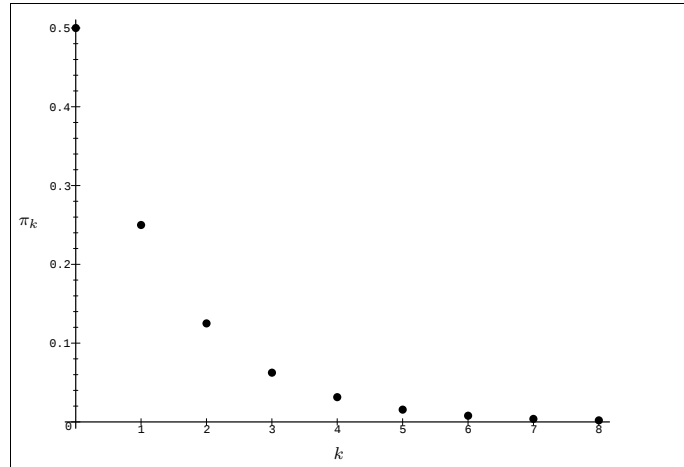


D.4 FIFO-Systeme

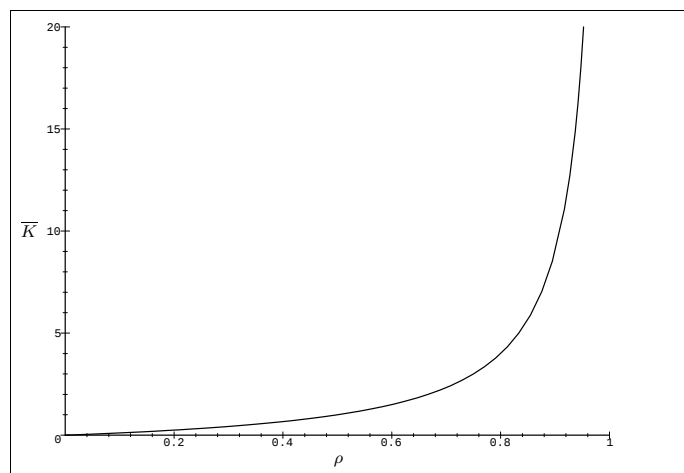
1 M/M/1

Zustandswahrscheinlichkeit: $\pi_k = (1 - \rho)\rho^k$



➤ Mittlere Anzahl der Aufträge $\bar{K}$:

$$\bar{K} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$



- Varianz der Anzahl der Aufträge:

$$\sigma_K^2 = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$$

- Variationskoeffizient der Anzahl der Aufträge:

$$c_K = \frac{\sigma_K}{\bar{K}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

- Verteilung der Antwortzeit:

$$F_T(x) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)x}$$

- Varianz der Antwortzeit:

$$\text{var}(T) = \frac{1}{\mu^2(1 - \rho)^2}$$

2 M/M/m

- Zustandswahrscheinlichkeit:

$$\pi_k = \begin{cases} \pi_0 \frac{(m\rho)^k}{k!}, & 0 \leq k \leq m \\ \pi_0 \frac{\rho^k m^m}{m!}, & k \geq m, \end{cases}$$

mit:

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1 - \rho} \right]^{-1}$$

- Wartewahrscheinlichkeit P_m :

$$P_m = P(K \geq m) = \sum_{k=m}^{\infty} \pi_k$$

$$= \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} \cdot \pi_0$$

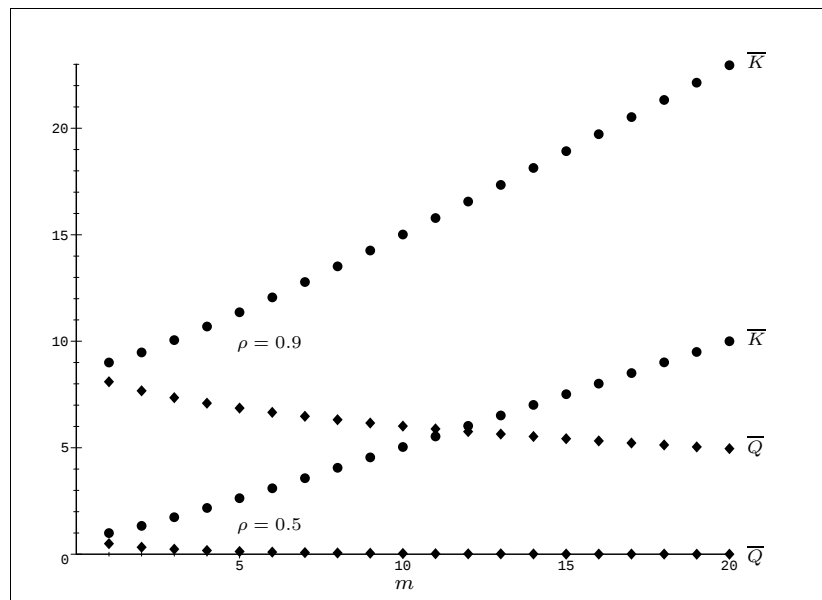
- Mittlere Anzahl der Aufträge $\bar{K}$:

$$\bar{K} = m\rho + \frac{\rho}{1-\rho} \cdot P_m$$

- Wartezeitverteilung:

$$F_W(x) = \begin{cases} 1 - P_m, & x = 0, \\ 1 - P_m \cdot e^{-m\mu(1-\rho)x}, & x > 0. \end{cases}$$

- Mittlere Warteschlangenlänge und mittlere Anzahl der Aufträge als Funktion der Anzahl der Bedieneinheiten:



3 M/M/oo-IS (Infinite Server)

- Infinite Server bedeutet, daß immer mindestens genausoviele Bedieneinheiten (Server) vorhanden sind wie Aufträge im System sind
- Es muß daher nie gewartet werden
- Zustandswahrscheinlichkeit:

$$\pi_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

- Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\overline{K} = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Mittlere Antwortzeit = Mittlere Bedienzeit:

$$\overline{T} = \frac{1}{\mu}$$

4 M/M/1/K Finite Capacity

- WS hat endliche Kapazität
- Es können maximal K Aufträge im Wartesystem sein
- Ein ankommender Auftrag geht verloren, wenn die WS voll ist
- Zustandswahrscheinlichkeit ($a = \lambda/\mu$):

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{(1-a)a^k}{1-a^{K+1}}, & 0 \leq k \leq K, \\ 0, & k > K. \end{cases}$$

- Für $\lambda = \mu$ ($a = 1$):

$$\pi_0 = \frac{1}{K+1} = \pi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

- Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\bar{K} = \begin{cases} \frac{a}{1-a} - \frac{K+1}{1-a^{K+1}} \cdot a^{K+1}, & a \neq 1, \\ \frac{K}{2}, & a = 1. \end{cases}$$

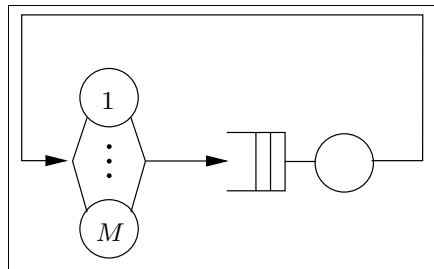
- Auslastung:

$$\rho = 1 - \pi_0 \neq \lambda/\mu$$

- Durchsatz:

$$\lambda(1 - \pi_K) \neq \lambda$$

5 Machine-Repairman-Model



- Modell für die Reparatur von M Maschinen durch einen "Repairman"
- Modell für ein Terminalsystem mit M Terminals und einem Rechner
- Geschlossenes Warteschlangennetz mit M Aufträgen
- Bedienrate des Repairman: μ
- Ausfallrate einer Maschine: λ

- Zustandswahrscheinlichkeit ($P(k \text{ Reparaturaufträge beim Repairman})$):

$$\pi_k = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{M!}{(M-k)!}$$

mit:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^M \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{M!}{(M-k)!}}$$

- Auslastung des Repairman:

$$\rho = (1 - \pi_0)$$

- Durchsatz:

$$\mu(1 - \pi_0)$$

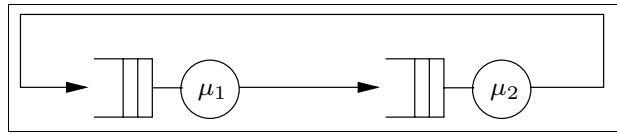
- Mittlere Antwortzeit (Mittlere Zeit bis zur Wiederherstellung der Betriebsfähigkeit einer Maschine):

$$\bar{T} = \frac{M}{\mu(1 - \pi_0)} - \frac{1}{\lambda}$$

- Mittlere Anzahl der Aufträge, mittl. Anzahl der defekten Maschinen (mit Little's Gesetz):

$$\bar{K} = M - \frac{\mu(1 - \pi_0)}{\lambda}$$

6 Tandem-Netzwerk



- Geschlossenes Netz mit K Aufträgen
- Zustand des Systems: (k_1, k_2)
mit:
 - k_1 : Anzahl der Aufträge in Knoten 1
 - k_2 : Anzahl der Aufträge in Knoten 2
 - $k_1 + k_2 = K$

- Zustandswahrscheinlichkeit für Knoten 1 ($P(k_1 \text{ Aufträge in Knoten 1})$):

$$\pi_1(k_1) = \pi_1(0) \cdot \frac{1}{u^{k_1}},$$

$$\pi_1(0) = \begin{cases} \frac{1 - \frac{1}{u}}{1 - (\frac{1}{u})^{K+1}}, & u \neq 1, \\ \frac{1}{K+1}, & u = 1. \end{cases}$$

mit:

$$u = \mu_1 / \mu_2$$

- Zustandswahrscheinlichkeit für Knoten 2 ($P(k_2 \text{ Aufträge in Knoten 2})$):

$$\pi_2(k_2) = \pi_2(0) \cdot u^{k_2},$$

$$\pi_2(0) = \begin{cases} \frac{1-u}{1-u^{K+1}}, & u \neq 1, \\ \frac{1}{K+1}, & u = 1. \end{cases}$$

- Auslastung von Knoten1 und Knoten 2:

$$\rho_1 = 1 - \pi_1(0), \quad \rho_2 = 1 - \pi_2(0)$$

- Durchsatz:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \rho_1 \mu_1 = \rho_2 \mu_2$$

- Mittlere Anzahl von Aufträgen:

$$\bar{K}_2 = \frac{u}{1-u} - \frac{(K+1) \cdot u^{K+1}}{1-u^{K+1}}, \quad u \neq 1,$$

$$\bar{K}_1 = K - \bar{K}_2$$

- ◆ System ist gegeben durch:
 - Zwischenankunftszeit exponentiell verteilt mit $\bar{T}_A = 1/\lambda$
 - Bedienzeit beliebig verteilt mit:
 - Mittelwert: $\bar{T}_B = 1/\mu$
 - Variationskoeffizient: c_B
 - Zahl der Bedieneinheiten: $m = 1$
 - Warteschlangenstrategie: FCFS

- ◆ Die mittlere Wartezeit eines Auftrages setzt sich zusammen aus den folgenden zwei Komponenten:
 - Die mittlere Restbedienzeit $\bar{W}_0$ des Auftrages in der Bedieneinheit
 - Die Summe der Bedienzeiten der Aufträge in der Warteschlange

Damit ergibt sich:

$$\bar{W} = \bar{W}_0 + \bar{Q} \cdot \bar{T}_B$$

Und daraus mit Little's Gesetz: $\bar{Q} = \lambda \bar{W}$ und $\rho = \lambda/\mu$

$$\bar{W} = \frac{\bar{W}_0}{1 - \rho}$$

- ◆ Die mittlere Restbedienzeit $\bar{W}_0$ ergibt sich aus:

$$\bar{W}_0 = P(\text{Bedieneinheit ist aktiv}) \cdot \bar{R} + P(\text{Bedieneinheit ist leer}) \cdot 0$$

mit der mittleren Restbedienzeit $\bar{R}$ einer aktiven Bedieneinheit (die mittlere Restbedienzeit der leeren Bedieneinheit ist natürlich 0):

$$\bar{R} = \frac{\overline{T_B^2}}{2\bar{T}_B} = \frac{\bar{T}_B}{2}(1 + c_B^2)$$

Für ein M/M/1- System ($c_B = 1$) ergibt sich daraus:

$$\bar{R}_{M/M/1} = \bar{T}_B = \frac{1}{\mu}$$

- ◆ Insgesamt ergibt sich damit für die mittlere Warteschlangenlänge (wieder mit dem Satz von Little $\bar{Q} = \lambda \bar{W}$):

$$\bar{Q} = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)} \cdot \frac{(1 + c_B^2)}{2}$$

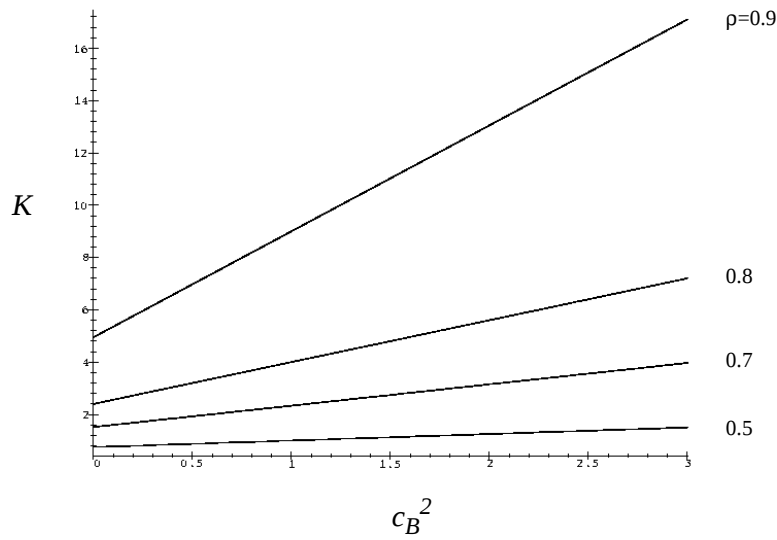
Pollaczek-Khintchine-Formel für die mittlere Warteschlangenlänge eines M/G/1-Systems

Für M/M/1 - Systeme ($c_B = 1$) und M/D/1 - Systeme ($c_B = 0$) ergibt sich:

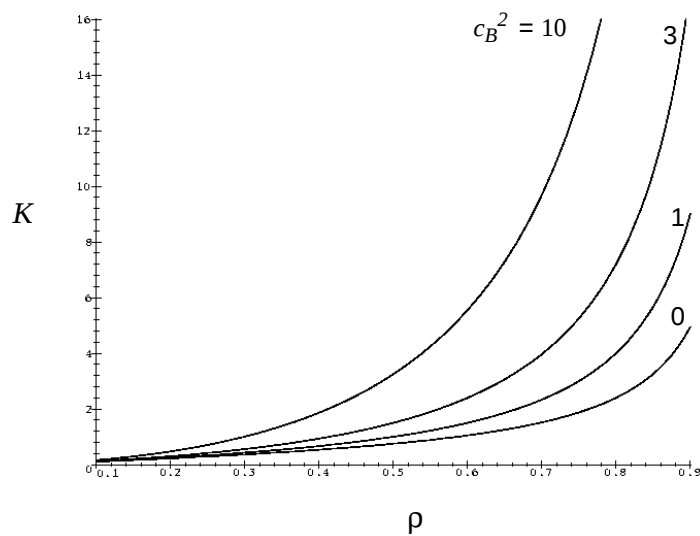
$$\bar{Q}_{M/M/1} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

$$\bar{Q}_{M/D/1} = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)}.$$

- Mittlere Anzahl der Aufträge in Abhängigkeit vom Variationskoeffizienten:



- Mittlere Anzahl der Aufträge in Abhängigkeit von der Auslastung ρ :



◆ System ist gegeben durch:

- Bedienzeit exponentiell verteilt mit $\bar{T}_B = 1/\mu$
 - Zahl der Bedieneinheiten: $m = 1$
- Zwischenankunftszeit beliebig verteilt mit:
 - Mittelwert: $\bar{T}_A = 1/\lambda$
 - Variationskoeffizient: c_A
- Warteschlangenstrategie: FCFS

- Parameter σ :

$$\sigma = A^{\sim}(\mu - \mu\sigma)$$

$A^{\sim}$: Laplacetransformierte der Dichte der Zwischenankunftszeit

- Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\bar{K} = \frac{\rho}{1 - \sigma}$$

- Zustandswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}\pi_k &= \rho(1 - \sigma)\sigma^{k-1}, \quad k > 0 \\ \pi_0 &= 1 - \rho,\end{aligned}$$

- ◆ Beispiel: M/M/1 - System:

$$\tilde{A}(s) = \lambda / (s + \lambda)$$

Damit ergibt sich:

$$\sigma = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

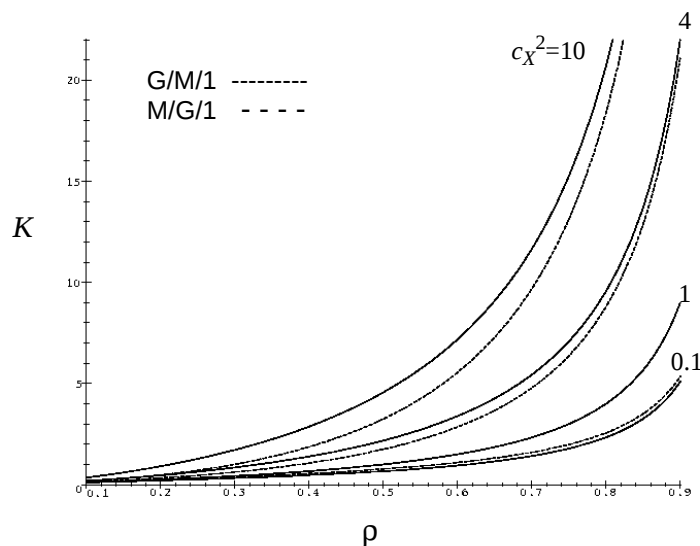
- ◆ Beispiel: E₂/M/1 - System

$$\tilde{A}(s) = \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^2$$

Damit ergibt sich:

$$\sigma = \rho + \frac{1}{2} - \sqrt{\rho - \frac{1}{4}}$$

- ◆ Mittlere Anzahl der Aufträge für ein M/G/1- und ein G/M/1- System:



- Bedienzeit und Zwischenankunftszeit sind nicht exponentiell verteilt
- Es existieren keine exakten Ergebnisse
- Für die mittlere Wartezeit sind die Ergebnisse für M/G/1 bzw. G/M/1 untere bzw. obere Grenzen, siehe Tabelle:

c_A^2	c_B^2	M/G/1	GI/M/1
> 1	> 1	LB	LB
> 1	< 1	LB	UB
< 1	> 1	UB	LB
< 1	< 1	UB	UB

LB: Lower Bound

UB: Upper Bound

- Allen-Cunneen-Approximationsformel für die mittlere Wartezeit:

$$\bar{W} \approx \frac{\rho/\mu}{1-\rho} \cdot \frac{c_A^2 + c_B^2}{2}$$

Exakt für M/M/1 und M/G/1

- Krämer/Langenbach-Belz-Approximationsformel (sehr genau):

$$\bar{W} \approx \frac{\rho/\mu}{1-\rho} \cdot \frac{c_A^2 + c_B^2}{2} \cdot G_{\text{KLB}}$$

$$G_{\text{KLB}} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1-\rho}{\rho} \cdot \frac{(1-c_A^2)^2}{c_A^2 + c_B^2}\right), & 0 \leq c_A \leq 1 \\ \exp\left(-(1-\rho) \frac{c_A^2 - 1}{c_A^2 + 4c_B^2}\right), & c_A > 1 \end{cases}$$

► Allen-Cunneen-Approximationsformel:

$$\overline{W} \approx \frac{P_m/\mu}{1-\rho} \cdot \frac{(1+c_B^2)}{2m}$$

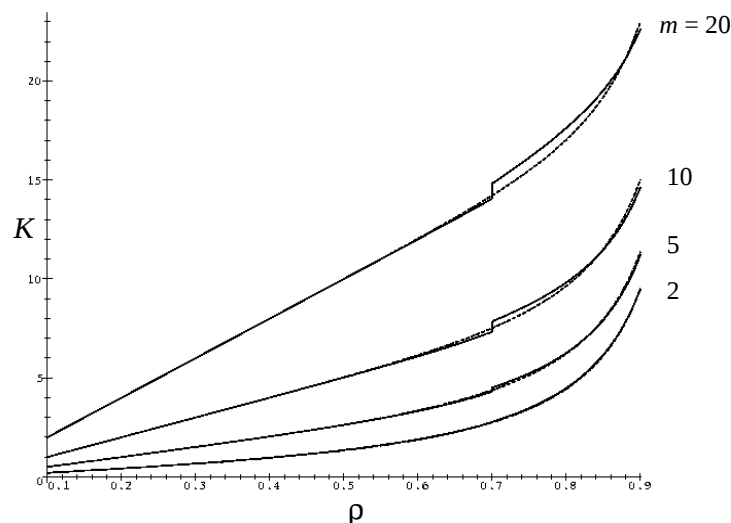
Approximation für die Wartewahrscheinlichkeit $P_{m,M/M/m}$, oder:

$$P_m \approx \begin{cases} \frac{\rho^m + \rho}{2}, & \rho > 0.7, \\ \rho^{\frac{m+1}{2}}, & \rho < 0.7. \end{cases}$$

m = 5:

ρ	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$P_{m_{\text{ex}}}$	0	0.06	0.23	0.38	0.55	0.76	0.88	0.97
$P_{m_{\text{app}}}$	0	0.06	0.21	0.34	0.56	0.75	0.86	0.97

Mittlere Anzahl der Aufträge für ein M/M/m - System mit $P_{m,\text{ex}}$ und $P_{m,\text{appr}}$.



- Allen-Cunneen-Approximationsformel für die mittlere Wartezeit:

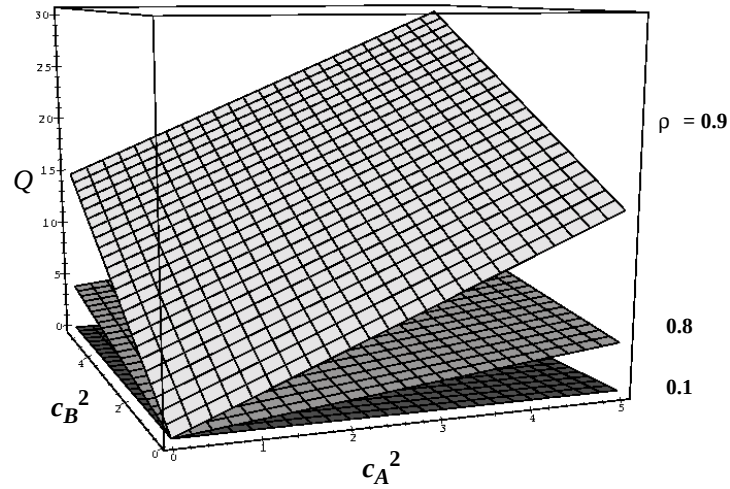
$$\overline{W} \approx \frac{P_m/\mu}{1-\rho} \cdot \frac{c_A^2 + c_B^2}{2m}$$

- Krämer/Langenbach-Belz-Approximationsformel für die mittlere Wartezeit:

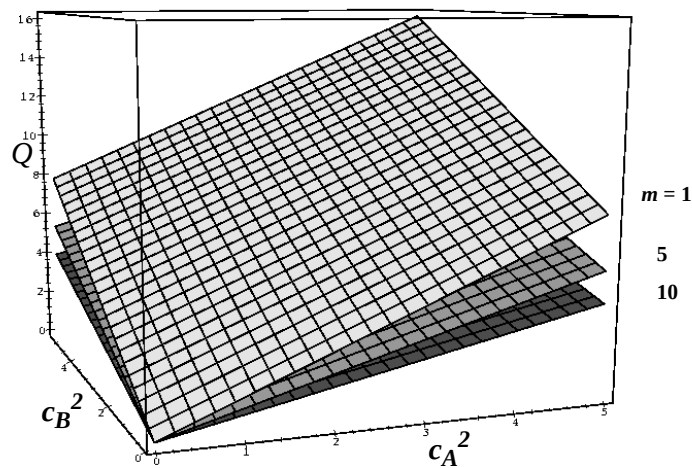
$$\overline{W} \approx \frac{P_m/\mu}{1-\rho} \cdot \frac{c_A^2 + c_B^2}{2m} \cdot G_{\text{KLB}}$$

- Für den Korrekturfaktor G_{KLB} gilt:

$$G_{\text{KLB}} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{1-\rho}{P_m} \frac{(1-c_A^2)^2}{c_A^2 + c_B^2}\right), & 0 \leq c_A \leq 1 \\ \exp\left(-(1-\rho) \frac{c_A^2 - 1}{c_A^2 + 4c_B^2}\right), & c_A > 1, \end{cases}$$



- Mittlere Warteschlangenlänge $\bar{Q}$ eines G/G/10-Systems



- Mittlere Warteschlangenlänge $\bar{Q}$ eines G/G/ m -Systems mit $\rho = 0.8$