

3 Effiziente Analyse von Produktformwarteschlangennetzen

■ Faltungsalgorithmus (Convolution):

A, B, C sind Vektoren der Länge $K + 1$.
Dann gilt für Faltung $C = A \otimes B$:

$$C(k) = \sum_{j=0}^k A(j) \cdot B(k-j), \quad k = 0, \dots, K.$$

- Beim Faltungsalgorithmus wird die Normalisierungskonstante durch Faltung aus zwei Vektoren ermittelt.

◆ Produktformlösung;

$$\pi(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^N F_i(k_i)$$

mit der Normalisierungskonstanten:

$$G(K) = \sum_{\substack{\mathbf{K} \\ k_i=K \\ i=1}} \prod_{i=1}^N F_i(k_i)$$

◆ Definition:

$$G_n(k) = \sum_{\substack{\mathbf{p}_n \\ k_i=k \\ i=1}} \prod_{i=1}^n F_i(k_i)$$

Damit gilt für die Normalisierungskonstante:

$$G(K) = G_N(K)$$

Es kann gezeigt werden, dass gilt:

$$G_n(k) = \sum_{j=0}^k F_n(j) \cdot G_{n-1}(k-j)$$

D.h. G_n ist die Faltung von F_n und G_{n-1}

◆ Faltungsalgorithmus zur Berechnung der Normalisierungskonstanten:

	1	...	$n-1$		n	...	N
0	1	...	$G_{n-1}(0) \cdot F_n(k)$		1		$1 = G(1)$
1	$F_1(1)$	...	$G_{n-1}(1) \cdot F_n(k-1)$		$G_n(1)$		
⋮	⋮		⋮		⋮		
$k-1$	$F_1(k-1)$	...	$G_{n-1}(k-1) \cdot F_n(1)$	$\sum$			
k	$F_1(k)$	...	$G_{n-1}(k) \cdot F_n(0)$		$G_n(k)$	...	$G_N(k) = G(k)$
⋮	⋮				⋮		
K	$F_1(K)$				$G_n(K)$		$G_N(K) = G(K)$

Dabei wurden die folgenden Anfangsbedingungen berücksichtigt:

$$G_1(k) = F_1(k), \quad k = 1, \dots, K$$

$$G_n(0) = 1, \quad n = 1, \dots, N$$

- ◆ Berechnung der Leistungsgrößen direkt aus den Normalisierungskonstanten:

► **Randwahrscheinlichkeiten:**

$$\pi_i(k) = \frac{F_i(k)}{G(K)} \cdot G_N^{(i)}(K - k)$$

$G_N^{(i)}$ kann als Normalisierungskonstante eines Netzes mit k Aufträgen und ohne den Knoten i angesehen werden.

$G_N^{(i)}$ kann iterativ berechnet werden mit:

$$G_N^{(i)}(k) = G(k) - \sum_{j=1}^k F_i(j) \cdot G_N^{(i)}(k - j)$$

mit der Anfangsbedingung:

$$G_N^{(i)}(0) = G(0) = 1, \quad i = 1, \dots, N$$

Für $m_i=1$ gilt die wesentlich einfachere Beziehung:

$$\pi_i(k) = \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^k \cdot \frac{1}{G(K)} \cdot \left(G(K - k) - \frac{e_i}{\mu_i} \cdot G(K - k - 1) \right)$$

► **Durchsatz:**

$$\lambda(K) = \frac{G(K - 1)}{G(K)} \quad \text{und} \quad \lambda_i(K) = e_i \cdot \frac{G(K - 1)}{G(K)}$$

► **Auslastung:**

$$\rho_i = \frac{e_i}{m_i \mu_i} \cdot \frac{G(K - 1)}{G(K)}$$

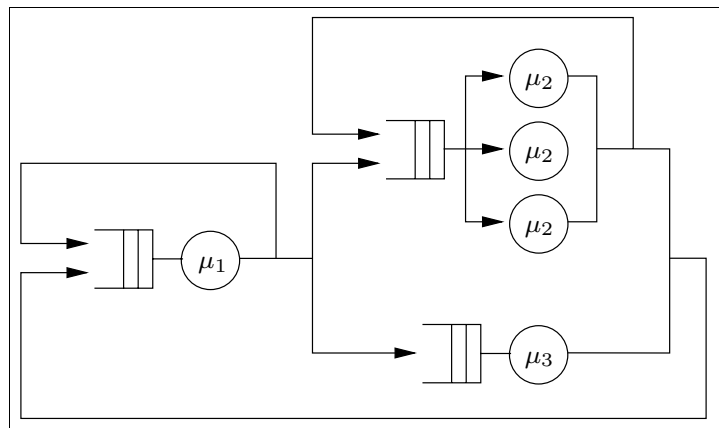
► **Mittlere Anzahl von Aufträgen:**

$$\bar{K}_i = \sum_{k=1}^K \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^k \cdot \frac{G(K-k)}{G(K)}$$

► **Mittlere Antwortzeit (mit Little):**

$$\bar{T}_i = \frac{\bar{K}_i}{\lambda_i} = \sum_{k=1}^K \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^k \cdot \frac{G(K-k)}{e_i \cdot G(K-1)}$$

◆ **Beispiel: Geschlossenes WS-Netz mit einer Auftragsklasse:**



- Anzahl der Knoten: $N = 3$
- Anzahl der Aufträge: $K = 3$
- Anzahl der Bedieneinheiten der Knoten:

$$m_1 = 2; \quad m_2 = 3; \quad m_3 = 1$$

- Bedienraten: $\mu_1 = 0.8/\text{sec}$; $\mu_2 = 0.6/\text{sec}$; $\mu_3 = 0.4/\text{sec}$
- Besuchshäufigkeiten: $e_1 = 1$; $e_2 = 0.667$; $e_3 = 0.2$

Leistungsgrößen:

- Funktionen $F_i(k_i)$:

$$\begin{aligned}
 F_1(0) &= \underline{1}, & F_2(0) &= \underline{1}, & F_3(0) &= \underline{1}, \\
 F_1(1) &= \underline{1.25}, & F_2(1) &= \underline{1.111}, & F_3(1) &= \underline{0.5}, \\
 F_1(2) &= \underline{0.781}, & F_2(2) &= \underline{0.617}, & F_3(2) &= \underline{0.25}, \\
 F_1(3) &= \underline{0.488}, & F_2(3) &= \underline{0.229}, & F_3(3) &= \underline{0.125}.
 \end{aligned}$$

- Normalisierungskonstante:

	1	2	N=3
0	1	1	1
1	1.25	2.361	2.861
2	0.781	2.787	4.218
K=3	0.488	2.356	4.465

- Randwahrscheinlichkeiten:

- Knoten 3:

$$\pi_3(0) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^0 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(3) - \frac{e_3}{\mu_3} G(2)\right) = \underline{0.528},$$

$$\pi_3(1) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^1 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(2) - \frac{e_3}{\mu_3} G(1)\right) = \underline{0.312},$$

$$\pi_3(2) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(1) - \frac{e_3}{\mu_3} G(0)\right) = \underline{0.132},$$

$$\pi_3(3) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^3 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(0) - \frac{e_3}{\mu_3} \cdot 0\right) = \underline{0.028}.$$

► Knoten 1 und Knoten 2:

Iterative Berechnung der NK $G_N^{(i)}$:

$$G_N^{(1)}(0) = \underline{1},$$

$$G_N^{(1)}(1) = G(1) - F_1(1)G_N^{(1)}(0) = \underline{1.611},$$

$$G_N^{(1)}(2) = G(2) - (F_1(1)G_N^{(1)}(1) + F_1(2)G_N^{(1)}(0)) = \underline{1.423},$$

$$G_N^{(1)}(3) = G(3) - (F_1(1)G_N^{(1)}(2) + F_1(2)G_N^{(1)}(1) + F_1(3)G_N^{(1)}(0)) = \underline{0.940}.$$

Entsprechend:

$$G_N^{(2)}(0) = \underline{1}, \quad G_N^{(2)}(1) = \underline{1.656}, \quad G_N^{(2)}(2) = \underline{1.75}, \quad G_N^{(2)}(3) = \underline{1.316}$$

und damit die Randwahrscheinlichkeiten:

$$\pi_1(0) = \frac{F_1(0)}{G(3)}G_N^{(1)}(3) = \underline{0.211}, \quad \pi_1(1) = \frac{F_1(1)}{G(3)}G_N^{(1)}(2) = \underline{0.398},$$

$$\pi_1(2) = \frac{F_1(2)}{G(3)}G_N^{(1)}(1) = \underline{0.282}, \quad \pi_1(3) = \frac{F_1(3)}{G(3)}G_N^{(1)}(0) = \underline{0.109},$$

$$\pi_2(0) = \underline{0.295}, \quad \pi_2(1) = \underline{0.412}, \quad \pi_2(2) = \underline{0.242}, \quad \pi_2(3) = \underline{0.051}$$

• Durchsätze:

$$\lambda_1 = e_1 \frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.945}, \quad \lambda_2 = e_2 \frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.630}, \quad \lambda_3 = e_3 \frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.189}$$

- Auslastungen:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{m_1 \mu_1} = \underline{0.590}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{m_2 \mu_2} = \underline{0.350}, \quad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \underline{0.473}$$

- Mittlere Anzahl der Aufträge in den Knoten:

$$\bar{K}_1 = \pi_1(1) + 2\pi_1(2) + 3\pi_1(3) = \underline{1.290},$$

$$\bar{K}_2 = \pi_2(1) + 2\pi_2(2) + 3\pi_2(3) = \underline{1.050},$$

$$\bar{K}_3 = \left(\frac{e_3}{\mu_3} \right) \frac{G(2)}{G(3)} + \left(\frac{e_3}{\mu_3} \right)^2 \frac{G(1)}{G(3)} + \left(\frac{e_3}{\mu_3} \right)^3 \frac{G(0)}{G(3)} = \underline{0.660}$$

■ Mittelwertanalyse (Mean Value Analysis):

- ◆ Grundlegende Gesetzmäßigkeiten:

- Satz von Little:

$$\bar{K} = \lambda \cdot \bar{T}$$

- Ankunftstheorem:

$$\bar{T}_i(K) = \frac{1}{\mu_i} \cdot [1 + \bar{K}_i(K-1)], \quad i = 1, \dots, N$$

◆ Algorithmus:

- **Schritt 1:** Initialisierung:

Fuer $i = 1, \dots, N$ und $j = 1, \dots, (m_i - 1)$

$$\bar{K}_i(0) = 0, \quad \pi_i(0 | 0) = 1, \quad \pi_i(j | 0) = 0$$

- **Schritt 2:** Iteration über die Anzahl der Aufträge: $k = 1, \dots, K$.

- **Schritt 2.1:** Mittlere Antwortzeit für die Knoten $i = 1, \dots, N$ (Ankunftstheorem):

$$\bar{T}_i(k) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} [1 + \bar{K}_i(k-1)] , & \text{Type-1,2,4} \\ \frac{1}{\mu_i \cdot m_i} \left[1 + \bar{K}_i(k-1) + \sum_{j=0}^{m_i-2} (m_i - j - 1) \cdot \pi_i(j | k-1) \right] , & \text{Type-1} \\ \frac{1}{\mu_i} , & \text{Type-3,} \end{cases} \quad \begin{matrix} (m_i = 1), \\ (m_i > 1), \end{matrix}$$

- **Schritt 2.2:** Gesamtdurchsatz (mit Little):

$$\lambda(k) = \frac{k}{\sum_{i=1}^N e_i \cdot \bar{T}_i(k)}$$

Durchsätze der einzelnen Knoten $i = 1, \dots, N$:

$$\lambda_i(k) = e_i \cdot \lambda(k)$$

- **Schritt 2.3:** Mittlere Anzahl der Aufträge in den Knoten $i = 1, \dots, N$ (mit Little):

$$\bar{K}_i(k) = e_i \cdot \lambda(k) \cdot \bar{T}_i(k)$$

► zu Schritt 2.1:

Iterative Berechnung der Randwahrscheinlichkeiten
für den Typ-1 Knoten ($m_i > 1$):

$$\pi_i(j | k) = \frac{\lambda_i(k)}{\mu_i \cdot j} \cdot \pi_i(j-1 | k-1)$$

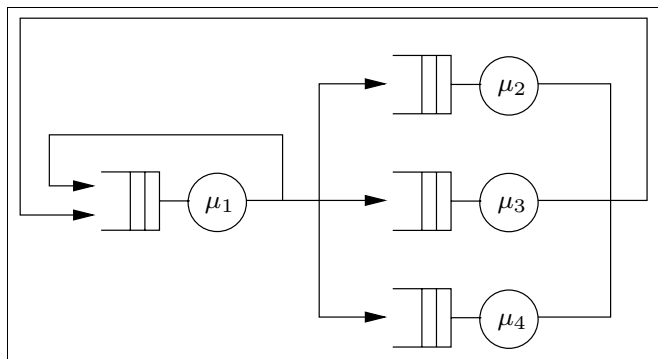
mit:

$$\pi_i(0 | k) = 1 - \frac{1}{m_i} \cdot \left(\frac{e_i \cdot \lambda(k)}{\mu_i} + \sum_{j=1}^{m_i-1} (m_i - j) \cdot \pi_i(j | k) \right)$$

und den Anfangsbedingungen:

$$\pi_i(0 | 0) = 1, \quad \pi_i(j | 0) = 0$$

◆ Beispiel:



- Anzahl der Knoten: $N = 4$
- Anzahl der Aufträge: $K = 6$
- Knotentyp für alle Knoten: M/M/1- FCFS
- Besuchshäufigkeiten: $e_1 = 1$; $e_2 = 0.4$; $e_3 = 0.2$; $e_4 = 0.1$
- Bedienraten: $\mu_1 = 50$; $\mu_2 = 5$; $\mu_3 = 2.5$; $\mu_4 = 1.667$

- **Schritt 1:** Initialisierung:

$$\bar{K}_1(0) = \bar{K}_2(0) = \bar{K}_3(0) = \bar{K}_4(0) = 0$$

- **Schritt 2:** Iteration über die Anzahl der Aufträge:

Iteration für $k = 1$:

- **Schritt 2.1:** Mittlere Antwortzeit (Ankunftstheorem):

$$\begin{aligned}\bar{T}_1(1) &= \frac{1}{\mu_1} [1 + \bar{K}_1(0)] = \underline{0.02}, & \bar{T}_2(1) &= \frac{1}{\mu_2} [1 + \bar{K}_2(0)] = \underline{0.2}, \\ \bar{T}_3(1) &= \frac{1}{\mu_3} [1 + \bar{K}_3(0)] = \underline{0.4}, & \bar{T}_4(1) &= \frac{1}{\mu_4} [1 + \bar{K}_4(0)] = \underline{0.6}.\end{aligned}$$

- **Schritt 2.2:** Durchsatz (Little):

$$\lambda(1) = \frac{1}{\sum_{i=1}^4 e_i \bar{T}_i(1)} = \underline{4.167}$$

- **Schritt 2.3:** Mittlere Anzahl der Aufträge (Little):

$$\begin{aligned}\bar{K}_1(1) &= \lambda(1) \bar{T}_1(1) e_1 = \underline{0.083}, & \bar{K}_2(1) &= \lambda(1) \bar{T}_2(1) e_2 = \underline{0.333}, \\ \bar{K}_3(1) &= \lambda(1) \bar{T}_3(1) e_3 = \underline{0.333}, & \bar{K}_4(1) &= \lambda(1) \bar{T}_4(1) e_4 = \underline{0.25}.\end{aligned}$$

Iteration für $k = 2$:

- **Schritt 2.1:** Mittlere Antwortzeit:

$$\begin{aligned}\bar{T}_1(2) &= \frac{1}{\mu_1} [1 + \bar{K}_1(1)] = \underline{0.022}, & \bar{T}_2(2) &= \frac{1}{\mu_2} [1 + \bar{K}_2(1)] = \underline{0.267}, \\ \bar{T}_3(2) &= \frac{1}{\mu_3} [1 + \bar{K}_3(1)] = \underline{0.533}, & \bar{T}_4(2) &= \frac{1}{\mu_4} [1 + \bar{K}_4(1)] = \underline{0.75}.\end{aligned}$$

► Schritt 2.2: Durchsatz:

$$\lambda(2) = \frac{2}{\sum_{i=1}^4 e_i \bar{T}_i(2)} = \underline{\underline{6.452}}$$

► Schritt 2.3: Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\begin{aligned} \bar{K}_1(2) &= \lambda(2) \bar{T}_1(2) e_1 = \underline{\underline{0.140}}, & \bar{K}_2(2) &= \lambda(2) \bar{T}_2(2) e_2 = \underline{\underline{0.688}}, \\ \bar{K}_3(2) &= \lambda(2) \bar{T}_3(2) e_3 = \underline{\underline{0.688}}, & \bar{K}_4(2) &= \lambda(2) \bar{T}_4(2) e_4 = \underline{\underline{0.484}}. \\ & \vdots \end{aligned}$$

► Nach 6 Iterationsschritten erhält man:

Node	1	2	3	4
Mean response time $\bar{T}_i$	0.025	0.570	1.140	1.244
Throughput λ_i	9.920	3.968	1.984	0.992
Mean number of jobs $\bar{K}_i$	0.244	2.261	2.261	1.234
Utilization ρ_i	0.198	0.794	0.794	0.595

■ Mittelwertanalyse für WS-Netze mit mehreren Auftragsklassen:

$$\bar{T}_{ir}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_{ir}} \left[1 + \sum_{s=1}^R \bar{K}_{is}(k - 1_r) \right] & \text{Type-1,2,4} \\ & (m_i = 1), \\ \frac{1}{\mu_{ir} \cdot m_i} \left[1 + \sum_{s=1}^R \bar{K}_{is}(k - 1_r) \right. \\ \quad \left. + \sum_{j=0}^{m_i-2} (m_i - j - 1) \pi_i(j \mid k - 1_r) \right], & \text{Type-1} \\ & (m_i > 1), \\ \frac{1}{\mu_{ir}}, & \text{Type-3.} \end{cases}$$

■ Mittelwertanalyse für WS-Netze mit lastabhängigen Bedienraten:

$$\bar{T}_i(k) = \sum_{j=1}^k \frac{j}{\mu_i(j)} \pi_i(j - 1 \mid k - 1)$$

mit:

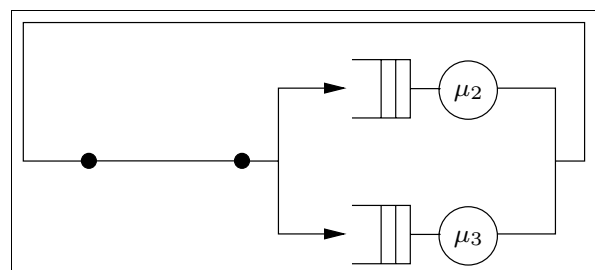
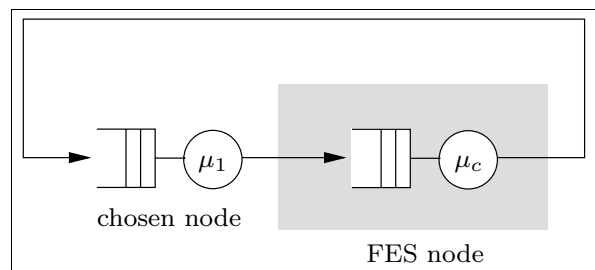
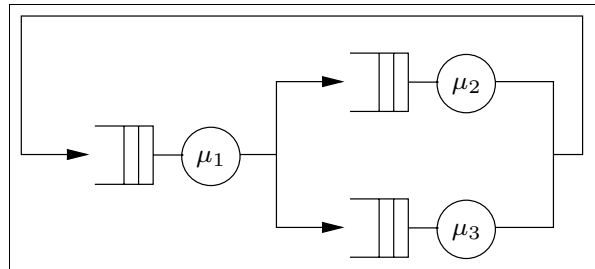
$$\pi_i(j \mid k) = \begin{cases} \frac{\lambda(k)}{\mu_i(j)} \pi_i(j - 1 \mid k - 1) e_i, & \text{for } j = 1, \dots, k, \\ 1 - \sum_{l=1}^k \pi_i(l \mid k), & \text{for } j = 0. \end{cases}$$

■ FES-Methode (Flow-Equivalent-Server-Methode):

◆ Algorithmus:

• Schritt 1:

In the given network, choose a node i and short-circuit it by setting the mean service time in that node to zero. Compute the throughputs $\lambda_i^{\text{sc}}(k)$ along the short circuit, as a function of the number of jobs $k = 1, \dots, K$ in the network. For this computation, any of the earlier solution algorithms for product-form queueing networks can be used.



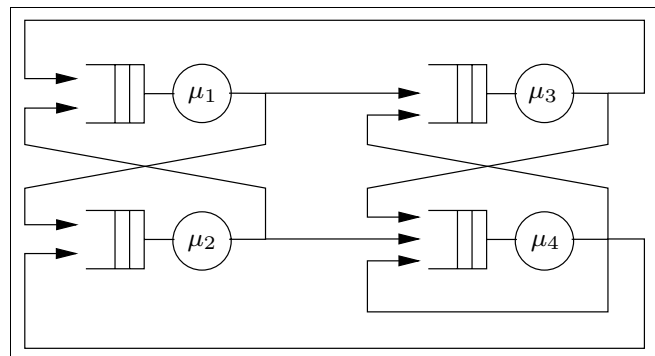
• **Schritt 2:**

From the given network, construct an equivalent reduced network consisting only of the chosen node i and the FES node c . The visit ratios in both nodes are e_i . The load-dependent service rate of the FES node is the throughput along the short-circuit path when there are k jobs in the network, that is: $\mu_c(k) = \lambda_i^{sc}(k)$ for $k = 1, \dots, K$.

• **Schritt 3:**

Compute the performance measures in the reduced network with any suitable algorithm for product-form networks (e.g., convolution or MVA).

◆ **Beispiel:**

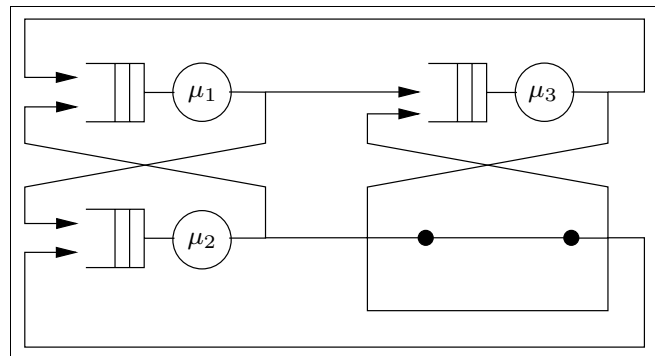


- Anzahl der Aufträge: $K = 2$
- Bedienraten: $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 2$; $\mu_3 = 3$; $\mu_4 = 4$
- Besuchshäufigkeiten: $e_1 = e_2 = e_3 = 1$; $e_4 = 1.25$
- Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{12} = 0.5, \quad p_{21} = 0.5, \quad p_{31} = 0.5, \quad p_{42} = 0.4,$$

$$p_{13} = 0.5, \quad p_{24} = 0.5, \quad p_{34} = 0.5, \quad p_{43} = 0.4, \quad p_{44} = 0.2.$$

• **Schritt 1:**



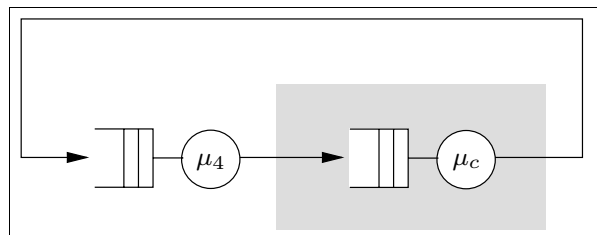
mit der Mittelwertanalyse erhält man:

$$\lambda(1) = \underline{0.545}, \quad \lambda(2) = \underline{0.776}$$

und mit $e_4 = 1.25$ für den Kurzschluss:

$$\lambda_4^{\text{sc}}(1) = \underline{0.682}, \quad \lambda_4^{\text{sc}}(2) = \underline{0.971}$$

• **Schritt 2:** Reduziertes WS-Netz (Reduced Network):



Es gilt:

$$\mu_c(1) = \lambda_4^{\text{sc}}(1) = 0.682, \quad \mu_c(2) = \lambda_4^{\text{sc}}(2) = 0.971$$

und:

$$e_4 = e_c = 1.25$$

- **Schritt 3:** Anwendung der lastabhängigen Mittelwertanalyse:

$$\bar{T}_4(2) = \underline{0.286}$$

$$\bar{K}_4(2) = \underline{0.253}$$

$$\lambda_4(2) = \underline{0.885}$$

:

◆ **Erweiterung der FES-Methode:**

- Es wird nicht nur ein einzelner Knoten betrachtet, sondern ein Teilnetzwerk aus mehreren Knoten und der Rest des WS-Netzes wird wieder zu einem FES-Knoten zusammengefasst.

3 Effiziente Analyse von Produktformwarteschlangennetzen

■ Faltungsalgorithmus (Convolution):

A, B, C sind Vektoren der Länge $K + 1$.
Dann gilt für Faltung $C = A \otimes B$:

$$C(k) = \sum_{j=0}^k A(j) \cdot B(k-j), \quad k = 0, \dots, K.$$

- Beim Faltungsalgorithmus wird die Normalisierungskonstante durch Faltung aus zwei Vektoren ermittelt.

◆ Produktformlösung;

$$\pi(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^N F_i(k_i)$$

mit der Normalisierungskonstanten:

$$G(K) = \sum_{\substack{\mathbf{K} \\ k_i=K \\ i=1}} \prod_{i=1}^N F_i(k_i)$$

◆ Definition:

$$G_n(k) = \sum_{\substack{\mathbf{p}_n \\ k_i=k \\ i=1}} \prod_{i=1}^n F_i(k_i)$$

Damit gilt für die Normalisierungskonstante:

$$G(K) = G_N(K)$$

Es kann gezeigt werden, dass gilt:

$$G_n(k) = \sum_{j=0}^k F_n(j) \cdot G_{n-1}(k-j)$$

D.h. G_n ist die Faltung von F_n und G_{n-1}

◆ Faltungsalgorithmus zur Berechnung der Normalisierungskonstanten:

	1	...	$n-1$		n	...	N
0	1	...	$G_{n-1}(0) \cdot F_n(k)$		1		$1 = G(1)$
1	$F_1(1)$	...	$G_{n-1}(1) \cdot F_n(k-1)$		$G_n(1)$		
⋮	⋮		⋮		⋮		
$k-1$	$F_1(k-1)$	...	$G_{n-1}(k-1) \cdot F_n(1)$	$\sum$			
k	$F_1(k)$	...	$G_{n-1}(k) \cdot F_n(0)$		$G_n(k)$	...	$G_N(k) = G(k)$
⋮	⋮				⋮		
K	$F_1(K)$				$G_n(K)$		$G_N(K) = G(K)$

Dabei wurden die folgenden Anfangsbedingungen berücksichtigt:

$$G_1(k) = F_1(k), \quad k = 1, \dots, K$$

$$G_n(0) = 1, \quad n = 1, \dots, N$$

- ◆ Berechnung der Leistungsgrößen direkt aus den Normalisierungskonstanten:

► **Randwahrscheinlichkeiten:**

$$\pi_i(k) = \frac{F_i(k)}{G(K)} \cdot G_N^{(i)}(K - k)$$

$G_N^{(i)}$ kann als Normalisierungskonstante eines Netzes mit k Aufträgen und ohne den Knoten i angesehen werden.

$G_N^{(i)}$ kann iterativ berechnet werden mit:

$$G_N^{(i)}(k) = G(k) - \sum_{j=1}^k F_i(j) \cdot G_N^{(i)}(k - j)$$

mit der Anfangsbedingung:

$$G_N^{(i)}(0) = G(0) = 1, \quad i = 1, \dots, N$$

Für $m_i = 1$ gilt die wesentlich einfachere Beziehung:

$$\pi_i(k) = \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^k \cdot \frac{1}{G(K)} \cdot \left(G(K - k) - \frac{e_i}{\mu_i} \cdot G(K - k - 1) \right)$$

► **Durchsatz:**

$$\lambda(K) = \frac{G(K - 1)}{G(K)} \quad \text{und} \quad \lambda_i(K) = e_i \cdot \frac{G(K - 1)}{G(K)}$$

► **Auslastung:**

$$\rho_i = \frac{e_i}{m_i \mu_i} \cdot \frac{G(K - 1)}{G(K)}$$

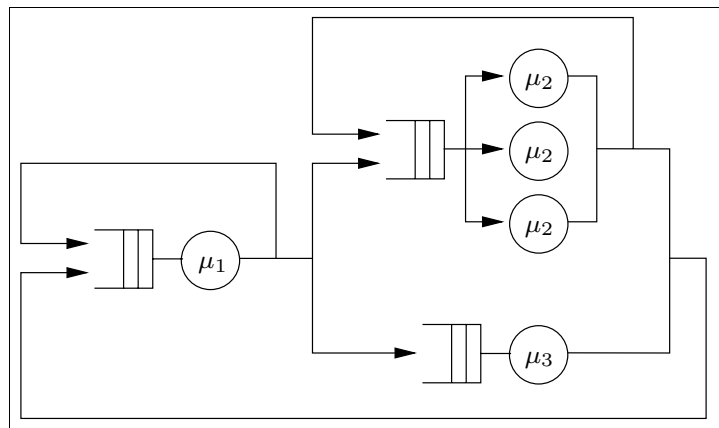
► **Mittlere Anzahl von Aufträgen:**

$$\bar{K}_i = \sum_{k=1}^K \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^k \cdot \frac{G(K-k)}{G(K)}$$

► **Mittlere Antwortzeit (mit Little):**

$$\bar{T}_i = \frac{\bar{K}_i}{\lambda_i} = \sum_{k=1}^K \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^k \cdot \frac{G(K-k)}{e_i \cdot G(K-1)}$$

◆ **Beispiel: Geschlossenes WS-Netz mit einer Auftragsklasse:**



- Anzahl der Knoten: $N = 3$
- Anzahl der Aufträge: $K = 3$
- Anzahl der Bedieneinheiten der Knoten:

$$m_1 = 2; \quad m_2 = 3; \quad m_3 = 1$$

- Bedienraten: $\mu_1 = 0.8/\text{sec}$; $\mu_2 = 0.6/\text{sec}$; $\mu_3 = 0.4/\text{sec}$
- Besuchshäufigkeiten: $e_1 = 1$; $e_2 = 0.667$; $e_3 = 0.2$

Leistungsgrößen:

- Funktionen $F_i(k_i)$:

$$\begin{aligned}
 F_1(0) &= \underline{1}, & F_2(0) &= \underline{1}, & F_3(0) &= \underline{1}, \\
 F_1(1) &= \underline{1.25}, & F_2(1) &= \underline{1.111}, & F_3(1) &= \underline{0.5}, \\
 F_1(2) &= \underline{0.781}, & F_2(2) &= \underline{0.617}, & F_3(2) &= \underline{0.25}, \\
 F_1(3) &= \underline{0.488}, & F_2(3) &= \underline{0.229}, & F_3(3) &= \underline{0.125}.
 \end{aligned}$$

- Normalisierungskonstante:

	1	2	N=3
0	1	1	1
1	1.25	2.361	2.861
2	0.781	2.787	4.218
K=3	0.488	2.356	4.465

- Randwahrscheinlichkeiten:

- Knoten 3:

$$\pi_3(0) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^0 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(3) - \frac{e_3}{\mu_3} G(2)\right) = \underline{0.528},$$

$$\pi_3(1) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^1 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(2) - \frac{e_3}{\mu_3} G(1)\right) = \underline{0.312},$$

$$\pi_3(2) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(1) - \frac{e_3}{\mu_3} G(0)\right) = \underline{0.132},$$

$$\pi_3(3) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^3 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(0) - \frac{e_3}{\mu_3} \cdot 0\right) = \underline{0.028}.$$

► Knoten 1 und Knoten 2:

Iterative Berechnung der NK $G_N^{(i)}$:

$$G_N^{(1)}(0) = \underline{1},$$

$$G_N^{(1)}(1) = G(1) - F_1(1)G_N^{(1)}(0) = \underline{1.611},$$

$$G_N^{(1)}(2) = G(2) - (F_1(1)G_N^{(1)}(1) + F_1(2)G_N^{(1)}(0)) = \underline{1.423},$$

$$G_N^{(1)}(3) = G(3) - (F_1(1)G_N^{(1)}(2) + F_1(2)G_N^{(1)}(1) + F_1(3)G_N^{(1)}(0)) = \underline{0.940}.$$

Entsprechend:

$$G_N^{(2)}(0) = \underline{1}, \quad G_N^{(2)}(1) = \underline{1.656}, \quad G_N^{(2)}(2) = \underline{1.75}, \quad G_N^{(2)}(3) = \underline{1.316}$$

und damit die Randwahrscheinlichkeiten:

$$\pi_1(0) = \frac{F_1(0)}{G(3)}G_N^{(1)}(3) = \underline{0.211}, \quad \pi_1(1) = \frac{F_1(1)}{G(3)}G_N^{(1)}(2) = \underline{0.398},$$

$$\pi_1(2) = \frac{F_1(2)}{G(3)}G_N^{(1)}(1) = \underline{0.282}, \quad \pi_1(3) = \frac{F_1(3)}{G(3)}G_N^{(1)}(0) = \underline{0.109},$$

$$\pi_2(0) = \underline{0.295}, \quad \pi_2(1) = \underline{0.412}, \quad \pi_2(2) = \underline{0.242}, \quad \pi_2(3) = \underline{0.051}$$

• Durchsätze:

$$\lambda_1 = e_1 \frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.945}, \quad \lambda_2 = e_2 \frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.630}, \quad \lambda_3 = e_3 \frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.189}$$

- Auslastungen:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{m_1 \mu_1} = \underline{0.590}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{m_2 \mu_2} = \underline{0.350}, \quad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \underline{0.473}$$

- Mittlere Anzahl der Aufträge in den Knoten:

$$\bar{K}_1 = \pi_1(1) + 2\pi_1(2) + 3\pi_1(3) = \underline{1.290},$$

$$\bar{K}_2 = \pi_2(1) + 2\pi_2(2) + 3\pi_2(3) = \underline{1.050},$$

$$\bar{K}_3 = \left(\frac{e_3}{\mu_3} \right) \frac{G(2)}{G(3)} + \left(\frac{e_3}{\mu_3} \right)^2 \frac{G(1)}{G(3)} + \left(\frac{e_3}{\mu_3} \right)^3 \frac{G(0)}{G(3)} = \underline{0.660}$$

■ Mittelwertanalyse (Mean Value Analysis):

- ◆ Grundlegende Gesetzmäßigkeiten:

- Satz von Little:

$$\bar{K} = \lambda \cdot \bar{T}$$

- Ankunftstheorem:

$$\bar{T}_i(K) = \frac{1}{\mu_i} \cdot [1 + \bar{K}_i(K-1)], \quad i = 1, \dots, N$$

◆ Algorithmus:

- **Schritt 1:** Initialisierung:

Fuer $i = 1, \dots, N$ und $j = 1, \dots, (m_i - 1)$

$$\bar{K}_i(0) = 0, \quad \pi_i(0 | 0) = 1, \quad \pi_i(j | 0) = 0$$

- **Schritt 2:** Iteration über die Anzahl der Aufträge: $k = 1, \dots, K$.

- **Schritt 2.1:** Mittlere Antwortzeit für die Knoten $i = 1, \dots, N$ (Ankunftstheorem):

$$\bar{T}_i(k) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} [1 + \bar{K}_i(k-1)] , & \text{Type-1,2,4} \\ \frac{1}{\mu_i \cdot m_i} \left[1 + \bar{K}_i(k-1) + \sum_{j=0}^{m_i-2} (m_i - j - 1) \cdot \pi_i(j | k-1) \right] , & \text{Type-1} \\ \frac{1}{\mu_i} , & \text{Type-3,} \end{cases} \quad \begin{matrix} (m_i = 1), \\ (m_i > 1), \end{matrix}$$

- **Schritt 2.2:** Gesamtdurchsatz (mit Little):

$$\lambda(k) = \frac{k}{\sum_{i=1}^N e_i \cdot \bar{T}_i(k)}$$

Durchsätze der einzelnen Knoten $i = 1, \dots, N$:

$$\lambda_i(k) = e_i \cdot \lambda(k)$$

- **Schritt 2.3:** Mittlere Anzahl der Aufträge in den Knoten $i = 1, \dots, N$ (mit Little):

$$\bar{K}_i(k) = e_i \cdot \lambda(k) \cdot \bar{T}_i(k)$$

► zu Schritt 2.1:

Iterative Berechnung der Randwahrscheinlichkeiten
für den Typ-1 Knoten ($m_i > 1$):

$$\pi_i(j | k) = \frac{\lambda_i(k)}{\mu_i \cdot j} \cdot \pi_i(j-1 | k-1)$$

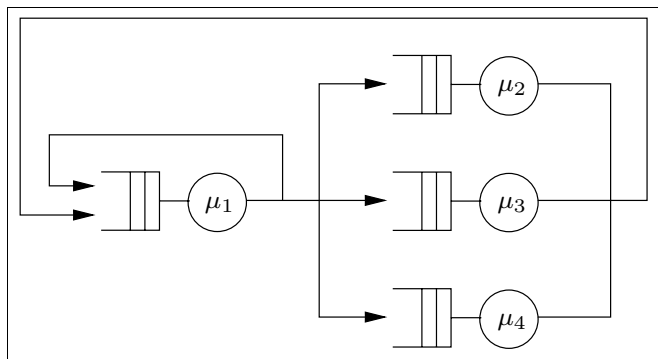
mit:

$$\pi_i(0 | k) = 1 - \frac{1}{m_i} \cdot \left(\frac{e_i \cdot \lambda(k)}{\mu_i} + \sum_{j=1}^{m_i-1} (m_i - j) \cdot \pi_i(j | k) \right)$$

und den Anfangsbedingungen:

$$\pi_i(0 | 0) = 1, \quad \pi_i(j | 0) = 0$$

◆ Beispiel:



- Anzahl der Knoten: $N = 4$
- Anzahl der Aufträge: $K = 6$
- Knotentyp für alle Knoten: M/M/1- FCFS
- Besuchshäufigkeiten: $e_1 = 1$; $e_2 = 0.4$; $e_3 = 0.2$; $e_4 = 0.1$
- Bedienraten: $\mu_1 = 50$; $\mu_2 = 5$; $\mu_3 = 2.5$; $\mu_4 = 1.667$

- **Schritt 1:** Initialisierung:

$$\bar{K}_1(0) = \bar{K}_2(0) = \bar{K}_3(0) = \bar{K}_4(0) = 0$$

- **Schritt 2:** Iteration über die Anzahl der Aufträge:

Iteration für $k = 1$:

- **Schritt 2.1:** Mittlere Antwortzeit (Ankunftstheorem):

$$\begin{aligned}\bar{T}_1(1) &= \frac{1}{\mu_1} [1 + \bar{K}_1(0)] = \underline{0.02}, & \bar{T}_2(1) &= \frac{1}{\mu_2} [1 + \bar{K}_2(0)] = \underline{0.2}, \\ \bar{T}_3(1) &= \frac{1}{\mu_3} [1 + \bar{K}_3(0)] = \underline{0.4}, & \bar{T}_4(1) &= \frac{1}{\mu_4} [1 + \bar{K}_4(0)] = \underline{0.6}.\end{aligned}$$

- **Schritt 2.2:** Durchsatz (Little):

$$\lambda(1) = \frac{1}{\sum_{i=1}^4 e_i \bar{T}_i(1)} = \underline{4.167}$$

- **Schritt 2.3:** Mittlere Anzahl der Aufträge (Little):

$$\begin{aligned}\bar{K}_1(1) &= \lambda(1) \bar{T}_1(1) e_1 = \underline{0.083}, & \bar{K}_2(1) &= \lambda(1) \bar{T}_2(1) e_2 = \underline{0.333}, \\ \bar{K}_3(1) &= \lambda(1) \bar{T}_3(1) e_3 = \underline{0.333}, & \bar{K}_4(1) &= \lambda(1) \bar{T}_4(1) e_4 = \underline{0.25}.\end{aligned}$$

Iteration für $k = 2$:

- **Schritt 2.1:** Mittlere Antwortzeit:

$$\begin{aligned}\bar{T}_1(2) &= \frac{1}{\mu_1} [1 + \bar{K}_1(1)] = \underline{0.022}, & \bar{T}_2(2) &= \frac{1}{\mu_2} [1 + \bar{K}_2(1)] = \underline{0.267}, \\ \bar{T}_3(2) &= \frac{1}{\mu_3} [1 + \bar{K}_3(1)] = \underline{0.533}, & \bar{T}_4(2) &= \frac{1}{\mu_4} [1 + \bar{K}_4(1)] = \underline{0.75}.\end{aligned}$$

► Schritt 2.2: Durchsatz:

$$\lambda(2) = \frac{2}{\sum_{i=1}^4 e_i \bar{T}_i(2)} = \underline{\underline{6.452}}$$

► Schritt 2.3: Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\begin{aligned} \bar{K}_1(2) &= \lambda(2) \bar{T}_1(2) e_1 = \underline{\underline{0.140}}, & \bar{K}_2(2) &= \lambda(2) \bar{T}_2(2) e_2 = \underline{\underline{0.688}}, \\ \bar{K}_3(2) &= \lambda(2) \bar{T}_3(2) e_3 = \underline{\underline{0.688}}, & \bar{K}_4(2) &= \lambda(2) \bar{T}_4(2) e_4 = \underline{\underline{0.484}}. \\ & \vdots \end{aligned}$$

► Nach 6 Iterationsschritten erhält man:

Node	1	2	3	4
Mean response time $\bar{T}_i$	0.025	0.570	1.140	1.244
Throughput λ_i	9.920	3.968	1.984	0.992
Mean number of jobs $\bar{K}_i$	0.244	2.261	2.261	1.234
Utilization ρ_i	0.198	0.794	0.794	0.595

■ Mittelwertanalyse für WS-Netze mit mehreren Auftragsklassen:

$$\bar{T}_{ir}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_{ir}} \left[1 + \sum_{s=1}^R \bar{K}_{is}(k - 1_r) \right] & \text{Type-1,2,4} \\ & (m_i = 1), \\ \frac{1}{\mu_{ir} \cdot m_i} \left[1 + \sum_{s=1}^R \bar{K}_{is}(k - 1_r) \right. \\ \quad \left. + \sum_{j=0}^{m_i-2} (m_i - j - 1) \pi_i(j \mid k - 1_r) \right] , & \text{Type-1} \\ & (m_i > 1), \\ \frac{1}{\mu_{ir}} , & \text{Type-3.} \end{cases}$$

■ Mittelwertanalyse für WS-Netze mit lastabhängigen Bedienraten:

$$\bar{T}_i(k) = \sum_{j=1}^k \frac{j}{\mu_i(j)} \pi_i(j - 1 \mid k - 1)$$

mit:

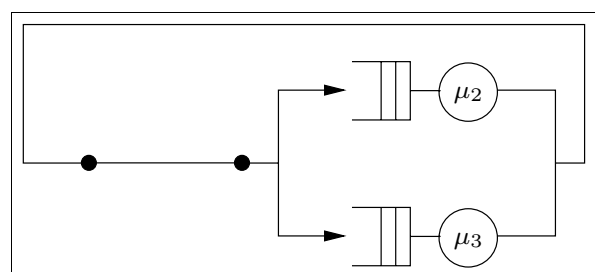
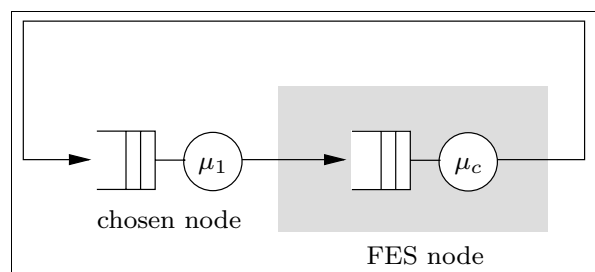
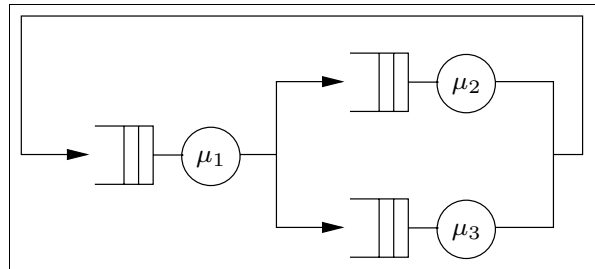
$$\pi_i(j \mid k) = \begin{cases} \frac{\lambda(k)}{\mu_i(j)} \pi_i(j - 1 \mid k - 1) e_i , & \text{for } j = 1, \dots, k, \\ 1 - \sum_{l=1}^k \pi_i(l \mid k) , & \text{for } j = 0. \end{cases}$$

■ FES-Methode (Flow-Equivalent-Server-Methode):

◆ Algorithmus:

• Schritt 1:

In the given network, choose a node i and short-circuit it by setting the mean service time in that node to zero. Compute the throughputs $\lambda_i^{sc}(k)$ along the short circuit, as a function of the number of jobs $k = 1, \dots, K$ in the network. For this computation, any of the earlier solution algorithms for product-form queueing networks can be used.



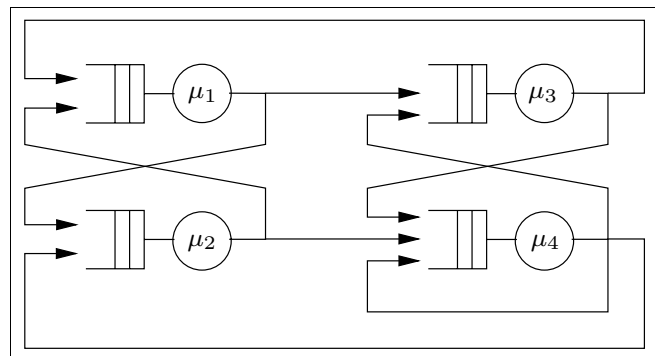
• **Schritt 2:**

From the given network, construct an equivalent reduced network consisting only of the chosen node i and the FES node c . The visit ratios in both nodes are e_i . The load-dependent service rate of the FES node is the throughput along the short-circuit path when there are k jobs in the network, that is: $\mu_c(k) = \lambda_i^{sc}(k)$ for $k = 1, \dots, K$.

• **Schritt 3:**

Compute the performance measures in the reduced network with any suitable algorithm for product-form networks (e.g., convolution or MVA).

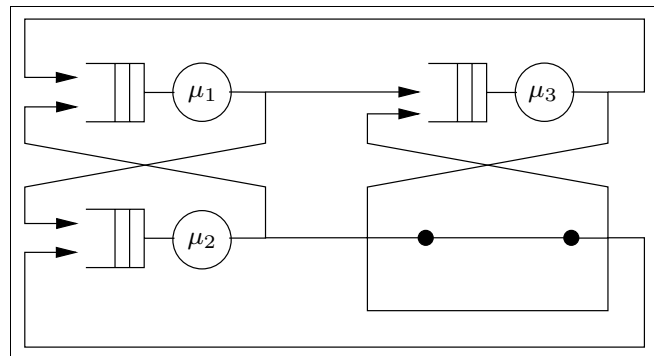
◆ **Beispiel:**



- Anzahl der Aufträge: $K = 2$
- Bedienraten: $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 2$; $\mu_3 = 3$; $\mu_4 = 4$
- Besuchshäufigkeiten: $e_1 = e_2 = e_3 = 1$; $e_4 = 1.25$
- Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{12} = 0.5, \quad p_{21} = 0.5, \quad p_{31} = 0.5, \quad p_{42} = 0.4, \\ p_{13} = 0.5, \quad p_{24} = 0.5, \quad p_{34} = 0.5, \quad p_{43} = 0.4, \quad p_{44} = 0.2.$$

• **Schritt 1:**



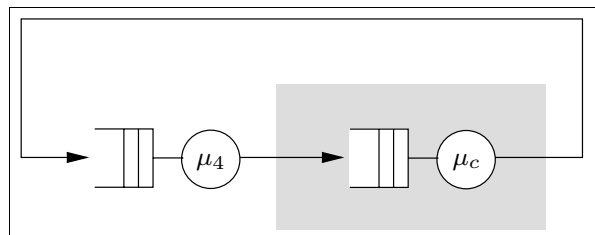
mit der Mittelwertanalyse erhält man:

$$\lambda(1) = \underline{0.545}, \quad \lambda(2) = \underline{0.776}$$

und mit $e_4 = 1.25$ für den Kurzschluss:

$$\lambda_4^{\text{sc}}(1) = \underline{0.682}, \quad \lambda_4^{\text{sc}}(2) = \underline{0.971}$$

• **Schritt 2:** Reduziertes WS-Netz (Reduced Network):



Es gilt:

$$\mu_c(1) = \lambda_4^{\text{sc}}(1) = 0.682, \quad \mu_c(2) = \lambda_4^{\text{sc}}(2) = 0.971$$

und:

$$e_4 = e_c = 1.25$$

- **Schritt 3:** Anwendung der lastabhängigen Mittelwertanalyse:

$$\bar{T}_4(2) = \underline{0.286}$$

$$\bar{K}_4(2) = \underline{0.253}$$

$$\lambda_4(2) = \underline{0.885}$$

:

◆ **Erweiterung der FES-Methode:**

- Es wird nicht nur ein einzelner Knoten betrachtet, sondern ein Teilnetzwerk aus mehreren Knoten und der Rest des WS-Netzes wird wieder zu einem FES-Knoten zusammengefasst.