Verlässliche Echtzeitsysteme

Grundlagen der statischen Programmanalyse

Peter Ulbrich

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Lehrstuhl Informatik 4 (Verteilte Systeme und Betriebssysteme)

`www4.informatik.uni-erlangen.de`

05. Mai 2015

Übersicht der heutigen Vorlesung

- Wie verifiziert man die Eigenschaften (funktional/nicht-funktional) von Software stichhaltig?
  - Dynamische Codeanalyse (Testen) (s. Kapitel IV) meist unzureichend!
  - Korrektheit im Allgemeinen nicht berechenbar/entscheidbar!

☞ Analyse und Vereinfachung der Programmsemantik
  - Statische Codeanalyse:
    automatische Extraktion von Programmeigenschaften
  - Abstrakte Interpretation:
    Analysemethodik unter Zuhilfenahme von Approximation

Fragestellungen

- Korrektheitsaussagen sind schwer zu formulieren!
  - Auch wenn nur eine bestimmten Programmeigenschaft relevant ist!
  - $\leadsto$ Wie hilft uns „Abstrakte Interpretation" bei diesem Problem?
- Was sind die mathematischen Grundlagen abstrakter Interpretation?
  - Eine „informelle" Sichtweise auf die Zusammenhänge
- **Ziel:** Grobes Verständnis abstrakter Interpretation entwickeln!

Gliederung

Fehlersuche: Was kann hier alles schief gehen?

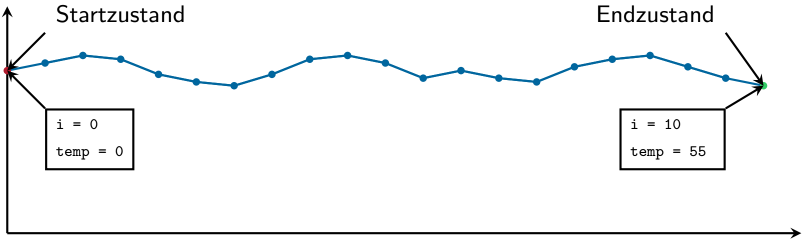
Die Gretchenfrage der Softwareentwicklung ...

```
1  unsigned int average(unsigned int *array,
2                       unsigned int size)
3  {
4    unsigned int temp = 0;
5
6    for(unsigned int i = 0;i < size;i++) {
7      temp += array[i];
8    }
9
10   return temp/size;
11 }
```

- Wo könnte es hier klemmen?
  - Ist der Zugriff auf Feld `array` in Zeile 7 korrekt?
  - Kann die Addition in Zeile 7 überlaufen?
  - Kann in Zeile 10 eine Division durch 0 auftreten?
- Wie findet man das heraus?

☞ Schauen wir mal, wie sich das Programm verhält.

Das Verhalten zur Laufzeit ist entscheidend!



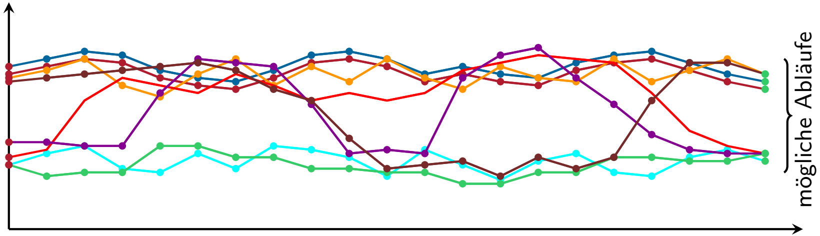
☞ `res = average([1,2,...,10],10);`

```
unsigned int average(uint *array,
                     uint size)
{
  uint temp = 0;

  for(uint i = 0;i < size;i++) {
    temp += array[i];
  }

  return temp/size;
}
```

i	temp
0	0
1	1
2	3
3	6
...	...
10	55

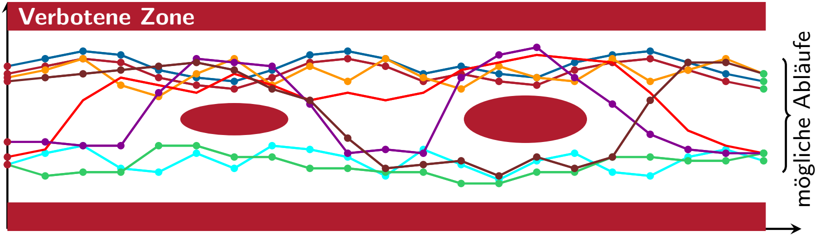
Konkrete Programmsemantik

Eine informelle Einführung in die Prinzipien abstrakter Interpretation [2]



- Die konkrete Semantik (engl. *concrete semantics*) beschreibt
  - Alle möglichen Ausführungen eines Programms
  - Unter allen möglichen Ausführungsbedingungen
  - Für unser Beispiel bedeutet dies:
    - 2^{32} verschieden große Felder, 2^{32} verschiedene Werte für jedes Element
- Sie beschreibt ein „unendliches“ mathematisches Objekt
  - Im Allgemeinen nicht berechenbar durch einen Algorithmus
  - Alle nicht-trivialen Fragestellungen sind nicht entscheidbar

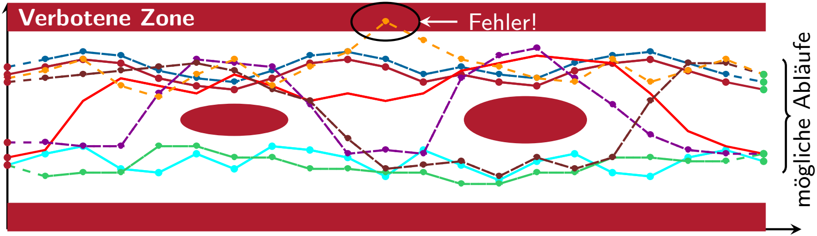
Sicherheitseigenschaft



- Sicherheitseigenschaften (engl. *safety properties*) stellen sicher, dass keine fehlerhaften/unerwünschten Zustände eingenommen werden
- Ein Sicherheitsnachweis (engl. *safety proof*) garantiert, dass die konkrete Semantik nie eine verbotene Zone durchläuft

☞ Das ist ein unentscheidbares Problem
  - Die konkrete Programmsemantik ist nicht berechenbar

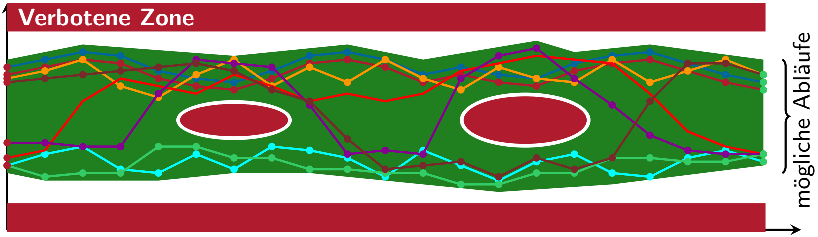
Testen: Das Problem der Möglichkeiten



- Testen betrachtet nur eine Teilmenge aller möglichen Ausführungen
  - ⇝ Gut geeignet, um die Existenz von Defekten zu zeigen
  - ⇝ Ungeeignet, um ihre Abwesenheit zu zeigen
    - Evtl. hat man die fehlerhafte Ausführung einfach nicht getestet
- Problem: unzureichende Abdeckung der konkreten Semantik

Gliederung

Abstrakte Interpretation



- Abstrakte Interpretation (engl. *abstract interpretation*)
  - Betrachtet eine abstrakte Semantik (engl. *abstract semantics*)
    - Sie umfasst alle Fälle der konkreten Programmsemantik
  - Ist die abstrakte Semantik sicher ⇒ konkrete Semantik ist sicher

Formale Methoden sind abstrakte Interpretationen

Die abstrakte Semantik wird aber auf unterschiedliche Weise bestimmt

Model Checking

- Abstrakte Semantik wird explizit vom Nutzer angegeben

$\leadsto$ endliche Beschreibung der konkreten Programmsemantik
  - Z.B. endliche Automaten, Aussagen- oder Prädikatenlogik
- Automatische Ableitung durch statische Analyse

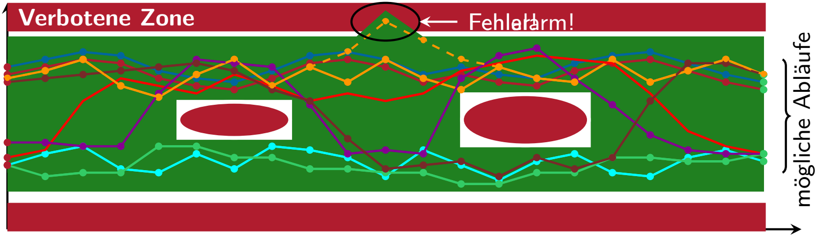
Deduktive Methoden

- Abstrakte Semantik wird durch Nachbedingungen beschrieben
- Nutzer gibt sie durch induktive Argumente an
  - Z.B. Vorbedingungen und Invarianten
- Automatische Ableitung durch statische Analyse

Statische Analyse

- Abstrakte Semantik wird ausgehend vom Quelltext bestimmt
  - Abbildung auf vorab bestimmte, wohldefinierte Abstraktionen
- Anpassungen (automatisch/durch den Nutzer) sind möglich

Eigenschaften abstrakter Semantiken



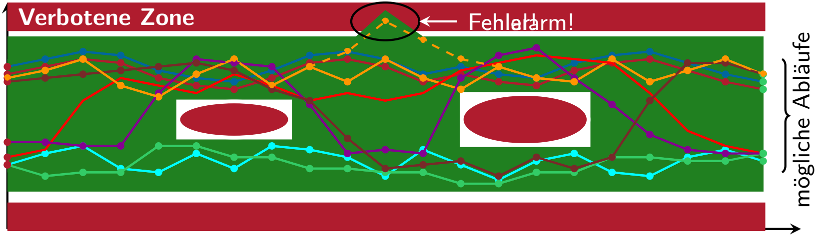
Vollständigkeit und Korrektheit

- Keine potentieller Defekt darf übersehen werden

⇝ nur so kann die Abwesenheit von Defekten gezeigt werden

  - Ansonsten wäre gegenüber reinem Testen nichts gewonnen

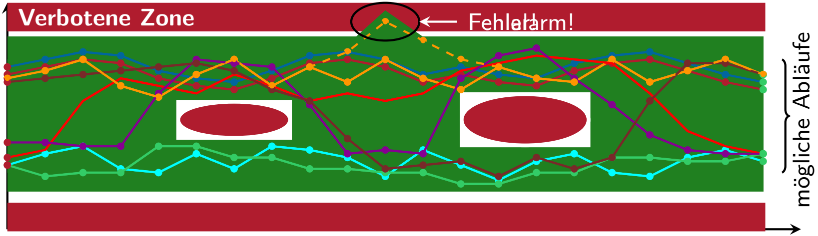
Eigenschaften abstrakter Semantiken



Präzision

- Weitgehende Vermeidung von Fehlalarmen (engl. *false alarms*)
  - Synonyme englische Bezeichnung: false positives
- Ermöglicht erst eine vollkommen automatisierte Anwendung

Eigenschaften abstrakter Semantiken



Geringe Komplexität

- Berechnung der abstrakten Semantik in akzeptabler Laufzeit
  - Vermeidung der kombinatorischen Explosion des Zustandsraums

Problemstellung

Reduktion des Zustandsraums ist unumgänglich!

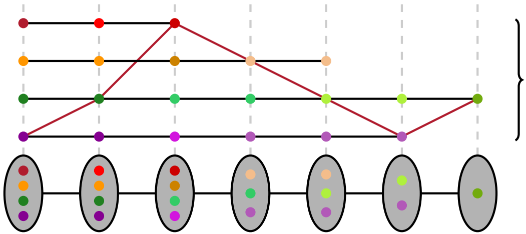
☞ Fasse verschiedene Zustände geeignet zusammen

$\rightsquigarrow$ Sammelsemantiken (s. Folie 15 ff.)

☞ Betrachte nur den Anfang der Zustandshistorie

$\rightsquigarrow$ Präfixsemantiken (s. Folie 20 ff.)

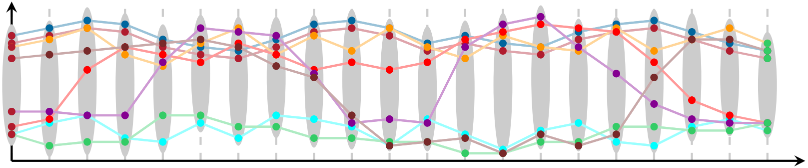
Sammelsemantik (engl. *collecting semantics*)



- Sammelt die Zustände aller Pfade an einem bestimmten Punkt
  - d. h. an einer bestimmten Programmanweisung
  - Aufgrund der Größe, wird sie i. d. R. approximiert
- Das ist eine verlustbehaftete Abstraktion
  - Beispiel: Existiert der rote Pfad?
    - Konkrete Semantik $\mapsto$ Nein, Sammelsemantik $\mapsto$???
- ☞ Der Laufzeitgewinn wird durch Unschärfe erkauft!
  - Das Ergebnis „Weiß nicht ...“ ist typisch für solche Methoden
  - Und die Ursache vieler Vorbehalte ...

Intervallabstraktion

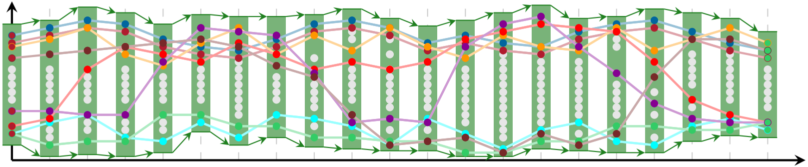
Als Approximation der Sammelsemantik [6, Woche 5]



- Die Sammelsemantik verwaltet Zustandsmengen

☞ die Intervallabstraktion nur ihre oberen und unteren Schranken

- Die zu verwaltenden Daten werden dadurch beträchtliche reduziert
- Allerdings wird auch die Präzision reduziert
  - $\leadsto$ bestimmte Zustände im appromixierten Zustandsraum werden nicht erreicht



Beispiel: Intervallabstraktion für ein C-Programm

```c
1 unsigned short x = 1;
2
3 while(x < 10000) {
4   x = x + 1;
5 }
6
7 return x;
```

Die Intervallabstraktion liefert:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 3 $x_3 = (x_1 \cup x_4) \cap [-\infty, 9999]$

Zeile 4 $x_4 = x_3 \oplus [1, 1]$

Zeile 7 $x_7 = (x_1 \cup x_5) \cap [10000, \infty]$

- Die Intervallabstraktion ist eine manuell vorgegebene, abstrakte Interpretation der Semantik der Programmiersprache C
  - C-Programme werden dann automatisiert darauf abgebildet
    - z. B. durch einen Übersetzer oder ein statisches Analysewerkzeug
  - Nur Elemente, die den Wertebereich von `x` betreffen, sind relevant
- Dies ist bereits eine starke Vereinfachung
  - Angenommen `x` wäre eingangs nicht bekannt
  - ⇝ es gäbe 10000 verschiedene Pfade durch den Zustandsraum
  - Nehme eine Schleifenobergrenze `unsigned short y` statt 10000 an
  - ⇝ es gäbe $\leq (2^{16})^2$ verschiedene Pfade durch den Zustandsraum

Beispiel: Intervallabstraktion für ein C-Programm (Forts.)

```
1 unsigned short x = 1;
2
3 while(x < 10000) {
4   x = x + 1;
5 }
6
7 return x;
```

Die Intervallabstraktion liefert:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 3 $x_3 = (x_1 \cup x_4) \cap [-\infty, 9999]$

Zeile 4 $x_4 = x_3 \oplus [1, 1]$

Zeile 7 $x_7 = (x_1 \cup x_4) \cap [10000, \infty]$

- Approximation durch chaotische Iteration (engl. *chaotic iteration*)

Iteration 1:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 3 $x_3 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = [2, 2]$

Zeile 7 $x_7 = \emptyset$

Iteration 2:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 3 $x_3 = [1, 2]$

Zeile 4 $x_4 = [2, 3]$

Zeile 7 $x_7 = \emptyset$

Beispiel: Intervallabstraktion (Forts.)

```
1 unsigned short x = 1;
2
3 while(x < 10000) {
4   x = x + 1;
5 }
6
7 return x;
```

Die Intervallabstraktion liefert:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 3 $x_3 = (x_1 \cup x_4) \cap [-\infty, 9999]$

Zeile 4 $x_4 = x_3 \oplus [1, 1]$

Zeile 7 $x_7 = (x_1 \cup x_4) \cap [10000, \infty]$

- Approximation durch chaotische Iteration (engl. *chaotic iteration*)

Iteration 3:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 3 $x_3 = [1, 3]$

Zeile 4 $x_4 = [2, 4]$

Zeile 7 $x_7 = \emptyset$

viele, viele Iterationen später:

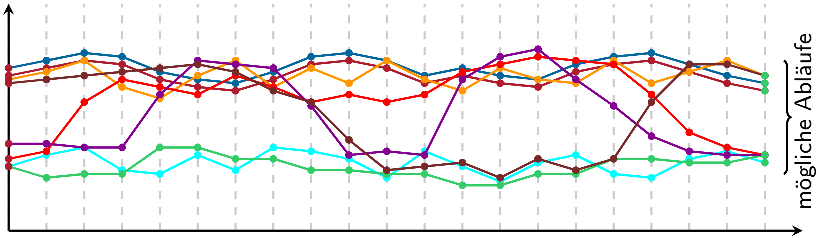
Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 3 $x_3 = [1, 9999]$

Zeile 4 $x_4 = [2, 10000]$

Zeile 7 $x_7 = [10000, 10000]$

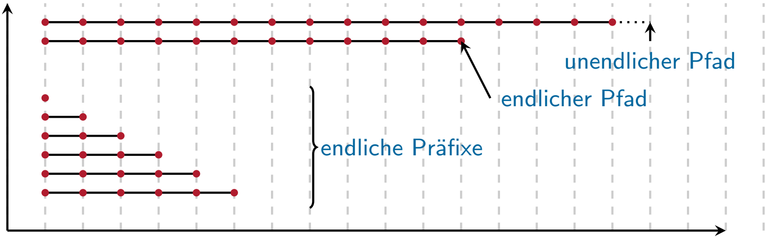
Pfadsemantik



- Betrachte durch ein Transitionssystem beschriebene Programmpfade
  - Ausgehend von ausgezeichneten Startzuständen,
  - Beschreiben sie eine (unendliche) Abfolge von Programmzuständen,
  - Deren Reihenfolge durch die Übergangsrelation bestimmt wird.
  - $\leadsto$ die Gesamtheit dieser Programmpfade heißt Pfadsemantik
    - Wie die konkrete Programmsemantik ist sie nicht berechenbar.

- Reduktion der Komplexität durch Abstraktion
  - Unendliche Pfade $\leadsto$ (endliche) Pfadpräfixe

Pfadpräfixe



- Pfadsemantiken enthalten alle endlichen und unendlichen Pfade
  - Pfadpräfixe enthalten nur die Anfänge dieser Pfade

☞ das ist eine verlustbehaftete Abstraktion
- Beispiel: betrachte Worte der Sprache $a^n b$
  - Frage: Gibt es Worte mit unendlich vielen aufeinanderfolgenden 'a'?
  - Pfadsemantik: $\{a^n b | n \geq 0\} \mapsto$ Nein
  - Pfadpräfixe: $\{a^n | n \geq 0\} \cup \{a^n b | n \geq 0\} \mapsto$???

Pfadpräfixe und Fixpunkte

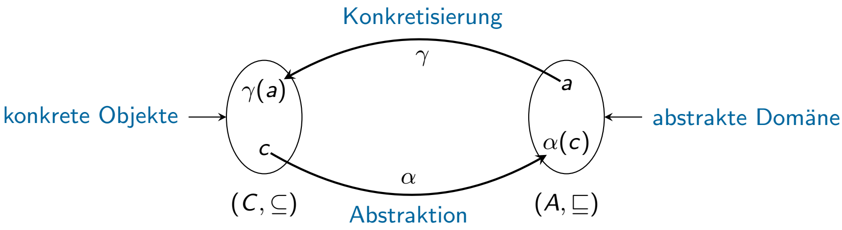
- Menge der Präfixe ist rekursiv:

$$\begin{aligned}\text{Präfixe} = &\{x | x \text{ ist Startzustand}\} \cup \\ &\{x_1 \rightarrow^* x_2 \rightarrow x_3 | x_1 \rightarrow^* x_2 \in \text{Präfixe} \wedge x_2 \rightarrow x_3 \in \rightarrow\}\end{aligned}$$

- Zu lösen ist die Fixpunktiteration Präfixe $= F(\text{Präfixe})$
  - üblicherweise besitzt diese Gleichung mehrere Lösungen
  - $\rightsquigarrow$ ordne die Lösungen nach der Teilmengenbeziehung $\subseteq$
  - $\rightsquigarrow$ wähle die kleinste Teilmenge als Lösung
  - $\rightsquigarrow$ least fixpoint prefix trace semantics

- Vereinfachungen ermöglichen effektive, iterative Analysealgorithmen
  - Vereinfachung im Sinne von Abstraktion bzw. Approximation
  - $\rightsquigarrow$ man muss nur noch die Präfixe betrachten
    - Nicht mehr die vollständigen (evtl. unendlichen) Pfade

Gliederung



- Wähle eine abstrakte Domäne (engl. *abstract domain*)
  - Ersetzt die Menge konkreter Objekte S durch ihre Abstraktion $\alpha(S)$
  - Verschiedene Domänen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Präzision
    - Vorzeichen, Intervalle, Oktagon, Polyhedra, ...
- Abstraktionsfunktion α (engl. *abstraction function*)
  - Bildet die Menge konkrete Objekte auf ihre abstrakte Interpretation ab
- Konkretisierungsfunktion γ (engl. *concretization function*)
  - Bildet die Menge abstrakter Objekte auf konkrete Objekte ab

Theoretisches Fundament $\leadsto$ Abstrakte Interpretation

☞ Approximation von f durch die abstrakte Funktion f'

- Häufig verwendet man Galoiseinbettungen
  - Diese sind Galoisverbindungen $(C, \subseteq) \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} (A, \sqsubseteq)$
  - Mit der Eigenschaft $\alpha(\gamma(a)) = a$
    - Konkretisierung gefolgt von Abstraktion impliziert keinen Präzisionsverlust

- Abstrakte Interpretation nutzt diese Eigenschaften
  - Statt die konkrete Funktion $f(c)$ zu berechnen
  - Kann man sie annähern, indem
    - Man die abstrakte Funktion f' auf die Abstraktion $\alpha(c)$ anwendet
    - Und das Ergebnis $f'(\alpha(c))$ wieder konkretisiert

Warum funktioniert das eigentlich ...?

- Wann ist eine Abstraktion korrekt?

$\leadsto$ Wenn sie durch eine Galoisverbindung beschrieben wird! $\leadsto$ **OK!**

- Fixpunkte ... wer sagt, dass die Iteration überhaupt konvergiert?

$\leadsto$ Aufsteigende Kettenbedingung! $\leadsto$ **???**

- Das waren ziemlich viele Iterationen ... geht das auch schneller?

$\leadsto$ Widening-/Narrowing-Operatoren helfen! $\leadsto$ **???**

- **Jetzt:** Grundlegende mathematische Zusammenhänge erfassen!
  - Was ist das und was hat es mit abstrakter Interpretation zu tun?
  - **Nicht:** Warum ist das korrekt?
    - Keine Beweisführung ...

Partiell geordnete Mengen

- Konkrete und abstrakte Domänen sind partiell geordnete Mengen!

Partiell geordnete Mengen (engl. *partially ordered sets*)

Eine partiell geordnete Menge ist ein Tupel $(S, \sqsubseteq)$:

- S ist eine Menge,
- $\sqsubseteq \subseteq S \times S$ ist eine Ordnungsrelation mit folgenden Eigenschaften:

Reflexiv	$\forall x \in S : x \sqsubseteq x$
Antisymmetrisch	$\forall x, y \in S : x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y$
Transitiv	$\forall x, y, z \in S : x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq z$

- Beispiele:
  - $(\mathbb{N}, \leq)$ ist ein partiell geordnete Menge
  - $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ ist ein partiell geordnete Menge

Obere und untere Schranken

- Sei $(S, \sqsubseteq)$ eine partiell geordnete Menge

Obere Schranke (engl. *upper bound*)

$x \in S$ eine obere Schranke von $P \subseteq S \Leftrightarrow y \in P : y \sqsubseteq x$

☞ analog: untere Schranke (engl. *lower bound*)

Kleinste obere Schranke (engl. *least upper bound*)

$x \in S$ ist eine kleinste obere Schranke von $P \subseteq S \Leftrightarrow$

- x ist eine obere Schranke von P und
- x ist kleiner als alle oberen Schranken von P:

$$\forall y \in S : (\forall z \in P : z \sqsubseteq y) \Rightarrow x \sqsubseteq y$$

☞ analog: größte untere Schranke (engl. *greatest lower bound*)

Verbände

Vollständiger Verband (engl. *complete lattice*)

Ein vollständiger Verband ist eine partiell geordnete Menge $(S, \sqsubseteq, \bot, \top, \sqcup, \sqcap)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $(S, \sqsubseteq)$ ist eine partiell geordnete Menge
- Für jede Teilmenge $P \subseteq S$ existiert eine
  - Eine kleinste obere Schranke $\sqcup P$ und
  - Eine größte untere Schranke $\sqcap P$
- $\bot = \sqcap S$ heißt Infimum von S
- $\top = \sqcup S$ heißt Supremum von S

- Beispiele:
  - $(\mathcal{P}(S), \subseteq, \emptyset, S, \cup, \cap)$ ist ein vollständiger Verband
  - $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \leq, -\infty, +\infty, \max, \min)$ ist ein vollständiger Verband
    - Die Menge der ganzen Zahlen erweitert um $-\infty$ und $+\infty$

Terminierung der Fixpunktiteration

- Möglichkeit 1: aufsteigende Kettenbedingung ist erfüllt

$\leadsto$ aufsteigende Ketten sind endlich

$\leadsto$ Fixpunktiteration terminiert

- Möglichkeit 2: aufsteigende Kettenbedingung ist nicht erfüllt

$\leadsto$ Terminierung kann durch einen Widening-Operator erzwungen werden

Widening-Operator

Sei V ein Verband, ein Widening-Operator $\triangledown : V \times V \mapsto V$ ist eine Abbildung für die gilt:

$$\forall x, y \in V : x \sqsubseteq x \triangledown y \wedge y \sqsubseteq x \triangledown y$$

- Sicher Abschätzung der Elemente x und y nach oben durch $x \triangledown y$
- Ermöglicht auch eine Beschleunigung der Fixpunktiteration
  - Widening-Operator $\triangledown \approx$ Bestimmung der kleinsten oberen Schranke
  - In vollständigen Verbänden mit aufsteigender Kettenbedingung

Beispiel: Intervallabstraktion – nun mit Widening

```
1 unsigned short x = 1;
2
3 while(x < 10000) {
4   x = x + 1;
5 }
6
7 return x;
```

Die Intervallabstraktion liefert:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 3 $x_3 = (x_1 \triangledown x_4) \cap [-\infty, 9999]$

Zeile 4 $x_4 = x_3 \oplus [1, 1]$

Zeile 7 $x_7 = (x_1 \triangledown x_4) \cap [10000, \infty]$

- Approximation mit Hilfe des Widening-Operators

Iteration 1:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 3 $x_3 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = [2, 2]$

Zeile 7 $x_7 = \emptyset$

Iteration 2:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 3 $x_3 = [1, 9999]$

Zeile 4 $x_4 = [2, 10000]$

Zeile 7 $x_7 = [10000, 10000]$

- ☞ Konvergenz in der 2. Iteration

Gliederung

Zusammenfassung

Konkrete Programmsemantik ist nicht berechenbar

- Approximation durch eine abstrakte Semantik
  - Korrektheit der Approximation ist entscheidend
    - Nur so kann man einen Sicherheitsnachweis führen
  - Die Approximation muss präzise sein
    - Nur so kann man Fehlalarme vermeiden
  - Die Approximation darf nicht zu komplex sein
    - Nur so kann sie effizient berechnet werden

Transitionssystem beschreiben Programme

- Pfadsemantiken beschreiben die konkrete Programmsemantik
- Approximation durch Pfadpräfixe und Sammelsemantik

$\leadsto$ abstrakte Interpretation approximiert die Sammelsemantik

Mathematische Grundlagen abstrakter Interpretation

- (vollständig) partiell geordnete Mengen, Verbände
- Galoiseinbettungen, lokale konsistente Funktionen, Widening
- Intervallabstraktion

Literaturverzeichnis

[1] Cousot, P. :
Semantic foundations of program analysis.
In: *Program flow analysis: theory and applications* 10 (1981), S. 303–342

[2] Cousot, P. :
Abstract Interpretation.
`http://web.mit.edu/16.399/www/`, 2005

[3] Cousot, P. ; Cousot, R. :
Abstract Interpretation: A Unified Lattice Model for Static Analysis of Programs by Construction or Approximation of Fixpoints.
In: *Proceedings of the 4th ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages*.
ACM (POPL '77), 238–252

[4] Cousot, P. ; Cousot, R. :
Abstract interpretation frameworks.
In: *Journal of Logic and Computation* 2 (1992), Nr. 4, S. 511–547

Literaturverzeichnis (Forts.)

[5] Cousot, P. ; Cousot, R. :
Abstract Interpretation and Application to Logic Programs.
In: *Journal of Logic Programming* 13 (1992), Jul., Nr. 2-3, S. 103–179.
http://dx.doi.org/10.1016/0743-1066(92)90030-7. –
DOI 10.1016/0743–1066(92)90030–7. –
ISSN 0743–1066

[6] Midtgaard, J. :
Abstract Interpretation.
http://www.cs.au.dk/~jmi/AbsInt/, 2012