

## BP 2 Prozessorvergabe - Monoprozessoren: Analytische Methode

### 4.2 Die analytische Methode

#### 4.2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

- Ist  $X$  eine zufällige Größe, so bezeichnet  $P[X < x]$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig beobachteter Wert von  $X$  kleiner als  $x$  ist. Im weiteren wird stets vorausgesetzt, daß  $P[X < 0] = 0$  ist.
- Unter der Verteilungsfunktion einer zufälligen Größe  $X$  wird die Funktion  $F(x)$  mit  $P[X < x] = F(x)$  verstanden,  
unter der Dichte die Funktion  $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ .
- Unter dem  $n$ -ten Moment  $E[X^n]$  einer zufälligen Größe  $X$  wird der Wert  $\int_0^\infty x^n dF(x)$  verstanden. Das erste Moment wird auch als Mittelwert von  $X$  bezeichnet.
- $P[X < x | B(X)]$  bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis, das die Bedingung  $B$  erfüllt, einen Wert kleiner als  $x$  hat.

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.20

## BP 2 Die analytische Methode: Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie

### S4.8 Satz: Gedächtnislosigkeit und Exponentialverteilung

Eine Folge zufälliger Ereignisse habe die Eigenschaft gedächtnislos zu sein, d. h. daß für hinreichend kleine Zeitintervalle  $\Delta t$  in einem Intervall höchstens ein Ereignis eintritt und zwar mit der von  $t$  unabhängigen Wahrscheinlichkeit  $\lambda(\Delta t) + o(\Delta t)$ . Dann gilt für die Zeitintervalle  $X$  zwischen zwei Ereignissen:

$$P[X < x] = 1 - e^{-\lambda x} \quad (\text{Exponential-Verteilung}).$$

Für Exponentialverteilungen ist  $E[X] = 1/\lambda$  und  $E[X^2] = 2/\lambda^2$ .

### S4.9 Satz

Für Exponentialverteilungen gilt:  $P[X < x_0 + x | X \geq x_0] = P[X < x]$ .

### S3.10 Satz: Poisson-Verteilung

Für eine Ereignisfolge mit exponentieller Verteilung  $1 - e^{-\lambda x}$  der Intervalle zwischen zwei Ereignissen, kurz als Zwischenintervalle bezeichnet, gilt für die Zahl  $N(t)$  der im Intervall  $[0, t)$  eintretenden Ereignisse:

$$P[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (\text{Poisson-Verteilung}).$$

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.21

**BP 2**

## Die analytische Methode: Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie

**S4.11****Satz: Zusammenführung und Trennung von Exponentialverteilungen**

1. Führt man  $n$  Ereignisfolgen mit Zwischenintervallverteilungen  $1 - e^{-\lambda_i t}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) zu einer einzigen Ereignisfolge zusammen, so entsteht eine Ereignisfolge mit

Zwischenintervallverteilung  $1 - e^{-\lambda t}$ , wobei  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  ist.

2. Teilt man eine Ereignisfolge mit Zwischenintervallverteilung  $1 - e^{-\lambda t}$  in der Art in  $n$  Ereignisfolgen auf, daß die Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit  $\beta_i$  in die  $i$ -te Folge eingereiht werden, so sind die Zwischenintervalle in der  $i$ -ten Ereignisfolge gemäß  $1 - e^{-\beta_i \lambda t}$  verteilt.

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

**4.22****BP 2**

## Die analytische Methode: Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie

**D4.1****Definition: Laplace- bzw. Z-Transformierte**

1. Die *Laplace-Transformierte*  $F^*(z)$  einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion  $F(t)$  mit der Dichtefunktion  $f(t) = F'(t)$  ist definiert durch

$$F^*(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dF(t) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt .$$

2. Die *Z-Transformierte*  $X^*(z)$  einer diskreten Verteilung  $p_j = P[X=j]$  ist definiert durch

$$X^*(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j .$$

**S4.12****Satz****Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängige, nichtnegative Zufallsvariable mit**

**Verteilungsfunktionen  $F_j(x)$  und sei  $X = \sum_{j=1}^n X_j$  mit Verteilungsfunktion  $F(x)$ .**

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

**4.23**

Dann gilt sowohl im diskreten als auch im kontinuierlichen Fall:  $F^*(z) = \prod_{i=1}^n F_i^*(z)$

**S4.13 Satz**

Eine Verteilungsfunktion ist eindeutig durch ihre Transformierte bestimmt und umgekehrt.

**4.2.2 Einfache Modelle**

**Kendallsche Notation**

Ankunftsintervallverteilung / Bedienzeitverteilung / #Bedieneinheiten - Auswahlstrategie

**Kennbuchstaben für Verteilungen**

**M Exponentialverteilung**

**G allgemeine Verteilung**

**Beispiel**

**M/M/1-FCFS**

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

**4.24**

System mit einer Bedieneinheit, wobei Ankunftsintervalle und Bedienzeiten exponentiell verteilt sind und die Aufträge in der Reihenfolge ihrer Ankunft (First Come First Served) abgearbeitet werden.

18.06.99

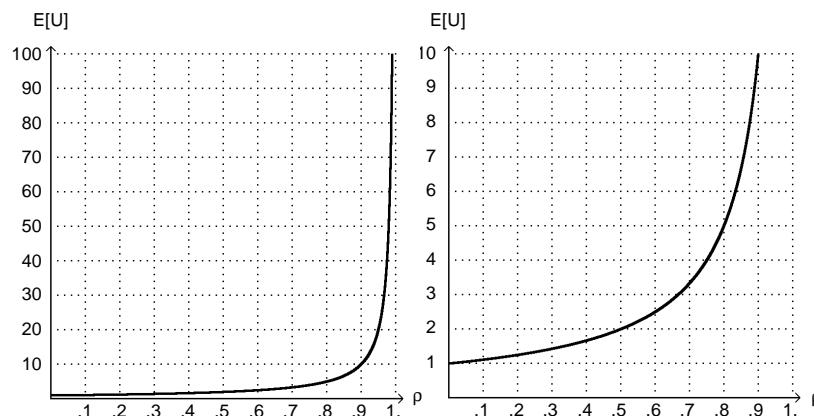
Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

**4.25**

## S4.14 Satz: M/M/1-FCFS

Sind in einem System mit einer Bedienstation die Ankunftsintervalle gemäß  $1 - e^{-\lambda t}$  und die Bedienzeiten gemäß  $1 - e^{-\mu t}$  verteilt, so gilt für die mittlere Zahl  $E[N]$  von unerledigten Aufträgen bei Verwendung der Strategie 'first-come-first-served':

$$E[N] = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad \text{mit } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

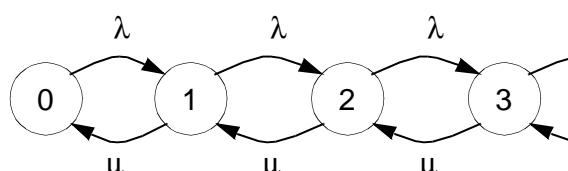


Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit  $E[U]$  von der Auslastung  $\rho$  bei M/M/1-FCFS (als Zeiteinheit wurde die mittlere Bedienzeit gewählt)

Beweis

Systemzustand charakterisiert durch Zahl der im System befindlichen Aufträge.

Übergangswahrscheinlichkeiten



Daraus folgt:

$$p_0 \lambda = p_1 \mu$$

$$p_{i-1} \lambda + p_{i+1} \mu = p_i (\lambda + \mu) \quad \text{für } i \geq 1$$

Betrachtung der Z-Transformierten führt zu

$$P^*(z) = \frac{\mu p_0 - \frac{\mu}{z} p_0}{\lambda + \mu - \frac{\mu}{z} - \lambda z} = p_0 \frac{1}{1 - \rho z}$$

Wegen  $P^*(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$  folgt  $p_0 = 1 - \rho$ .

Einsetzung ergibt  $P^*(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$  und somit

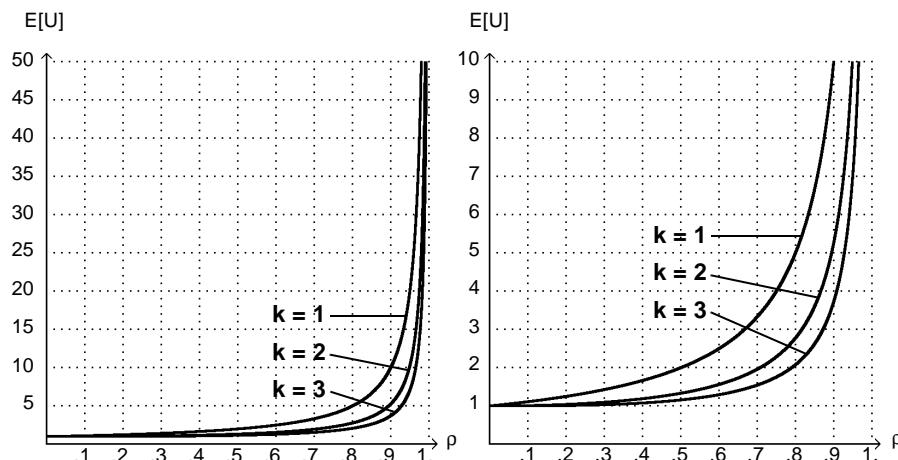
$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = P^*(z)|_{z=1} = \frac{(1-\rho)\rho}{(1-\rho z)^2}|_{z=1} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

**(M/M/k-FCFS)**  
Es sei ein System mit einer Warteschlange und  $k$  identischen Bedienstationen gegeben so, daß jede Station jeden Auftrag in der gleichen Zeit abwickeln kann. Die Ankunftsintervalle seien gemäß  $1 - e^{-\lambda x}$  verteilt und die Bedienzeiten gemäß  $1 - e^{-\mu x}$ . Die Zuteilung erfolge nach der Strategie 'first-come-first-served'. Dann gilt für die mittlere Zahl  $E[N]$  von unerledigten Aufträgen:

$$E[N] = k\rho + p_0 \frac{\rho(k\rho)^k}{k!(1-\rho)^2}$$

$$\text{mit } p_0 = \left( \frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^i}{i!} \right)^{-1}$$

$$\text{und } \rho = \lambda/(k\mu).$$



Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit  $E[U]$  von der Auslastung  $\rho$  bei M/M/k-FCFS (als Zeiteinheit wurde die mittlere Bedienzeit gewählt)

## S4.16

## (M/G/1-FCFS; Pollaczek/Khinchine-Formel)

Es sei ein System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation gegeben. Die Ankunftsintervalle seien gemäß  $1 - e^{-\lambda x}$  und die Bedienzeiten beliebig verteilt. Die Zuteilung erfolge nach der Strategie 'first-come-first-served'.

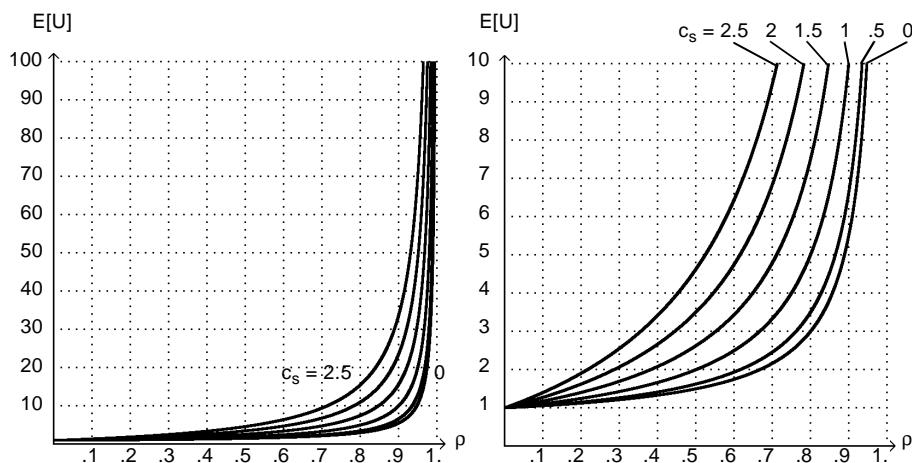
Bezeichnet man mit  $S$  die Zufallsvariable der Bedienzeiten, so gilt für die mittlere Zahl  $E[N]$  von unerledigten Aufträgen:

$$E[N] = \rho + \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)} \quad \text{mit } \rho = \lambda E[S].$$

Definiert man den *Variationskoeffizienten*  $c_s$  durch  $c_s = (\text{VAR}[S])^{1/2}/(E[S])$ , wobei  $\text{VAR}[S] = E[S^2] - E[S]^2$  die Varianz der Bedienzeitverteilung ist, so erhält man unter Verwendung des Theorems von Little

$$E[U] = \frac{1}{\mu} \left( 1 + \frac{\rho(1+c_s^2)}{2(1-\rho)} \right) \quad \text{mit } \mu = \frac{1}{E[S]}.$$

Für Exponentialverteilungen hat  $c_s$  den Wert 1.



Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit  $E[U]$  von der Auslastung  $\rho$  bei  $M/G/1$ -FCFS (als Zeiteinheit wurde die mittlere Bedienzeit gewählt)

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.32

S4.17

**Satz: M/G/1-FCFS**

In einem M/G/1-System, das nach der Strategie FCFS arbeitet, sei  $S$  die Zufallsvariable der Bedienzeit und  $R$  die Zufallsvariable für die Zeit, die ein zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt  $t_0$  die Bedienstation belegender Auftrag noch benötigt, um seinen gesamten Bedienwunsch abzuwickeln. Ist die Bedienstation zum Zeitpunkt  $t_0$  frei, so werde  $R = 0$  gesetzt. Dann gilt:

$$E[R] = \frac{\lambda}{2} E[S^2] = \frac{\rho}{2} \frac{E[S^2]}{E[S]}.$$

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.33

## 4.2.3

## Wartezeiten in Abhängigkeit von der geforderten Bedienzeit

 Die Strategie FCFS

Wird ein M/G/1 System nach FCFS abgearbeitet, so gilt nach Satz 3.16:

$$E[N] = \rho + \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)}.$$

Nach dem Theorem von Little ist  $E[W] = E[N]/\lambda - E[S]$ ,  
also im vorliegenden Fall

$$E[W] = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)}.$$

Für den Spezialfall M/M/1 errechnet man wegen

$$E[S] = 1/\mu \text{ und } E[S^2] = 2/\mu^2 \text{ den Mittelwert}$$

$$E[W] = \frac{\rho \mu^2}{2(1-\rho)\mu^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1-\rho}.$$

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.34

## Die Strategie Round-Robin

$$E[U(t)] = \frac{t}{1-\rho}.$$

$$E[W(t)] = \frac{t}{1-\rho} - t$$

$\sigma$  Wahrscheinlichkeit, daß zuletzt bearbeiteter Auftrag nicht fertig ist.

$g_i$  Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag  $i > 0$  Quanten benötigt.

$\pi_j$  Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $j$  Aufträge im System sind.

$U_k(j)$  Verweilzeit eines Auftrages, der  $k$  Quanten benötigt und bei dessen Ankunft bereits  $j$  Aufträge im System sind.

$E[U_k]$  Mittlere Verweilzeit eines Auftrags mit  $k$  Quanten Bedienzeitbedarf.

$E[D_i(j)]$  Für den  $i$ -ten Durchlauf benötigte Zeit (= Wartezeit + ein Bedienquant), wenn bei der erstmaligen Ankunft  $j$  Aufträge im System sind.

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.35

$$1. \quad g_i = \sigma^{i-1} (1 - \sigma)$$

$$2. \quad E[S] = \sum_{i=1}^{\infty} (iQ)g_i = \frac{Q}{1-\sigma}$$

$$3. \quad E[S^2] = Q^2 \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)\sigma^i = Q^2 \frac{1+\sigma}{(1-\sigma)^2}$$

$$4. \quad E[U_k] = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j E[U_k(j)]$$

$$5. \quad E[U_k(j)] = \sum_{i=1}^k E[D_i(j)]$$

$$6. \quad E[D_{i+1}(j)] = \sigma Q(x/Q - 1) + \lambda x Q + Q \\ = \sigma x - \sigma Q + \lambda Q x + Q \\ = (\lambda Q + \sigma) E[D_i(j)] + (1 - \sigma) Q .$$

$$7. \quad E[D_2(j)] = \lambda Q E[D_1(j)] + \sigma j Q + Q$$

$$8. \quad E[D_1(j)] = (\lambda Q + \sigma)^{i-2} E[D_2(j)] + Q(1 - \sigma) \frac{1 - (\lambda Q + \sigma)^{i-2}}{1 - \lambda Q - \sigma}$$

$$9. \quad U_1(j) = D_1(j)$$

$$10. \quad \alpha = \lambda Q + \sigma$$

$$11. \quad E[U_1] = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j E[D_1(j)]$$

$$\begin{aligned}
 E[U_k] &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j E[U_k(j)] \\
 &= E[U_1] + \frac{(k-1)Q}{1-\rho} + Q \left( \lambda E[U_1] + E[N] - \frac{\rho}{1-\rho} \right) \frac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}
 \end{aligned}
 \quad 12.$$

$$13. \quad E[U_1] = E[Q_r] + E[N_q]Q + Q$$

$$14. \quad E[Q_r] = \rho \frac{E[Q^2]}{2E[Q]} = \frac{\rho Q}{2}$$

$$15. \quad E[U_1] = (1 - \rho/2 + E[N])Q$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad E[U(t)] &= \lim_{Q \rightarrow 0} E[U_{t/Q}] = \lim_{Q \rightarrow 0} \left( E[U_1] + \frac{t/Q - 1}{1-\rho} Q \right) \\
 &= \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{t/Q - 1}{1-\rho} Q = \frac{t}{1-\rho}.
 \end{aligned}$$

**Nicht verdrängende Abarbeitung nach Prioritäten**

**Ankunftsverteilung der Priorität i:**  $1 - e^{-\lambda_i t}$

**Bedienzeitverteilung der Priorität i:**  $1 - e^{-\mu_i t}$

**Auslastungsanteil der Priorität i:**  $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$

$$E[W_k] = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]}{2(1 - \beta_{k-1})(1 - \beta_k)},$$

**mit**  $\beta_0 = 0$  **und**  $\beta_i = \sum_{j=1}^i \rho_j$  **für**  $i > 0$ .

**Beweis:**

$E[U_k]$  mittlere Verweilzeit für Aufträge der Priorität k

$E[W_k]$  mittlere Wartezeit für Aufträge der Priorität k

$E[S_k]$  mittlere Bedienzeit für Aufträge der Priorität k

$$E[U_k] = E[W_k] + E[S_k]$$

Man betrachtet einen markierten Auftrag mit Priorität k, der bei seiner Ankunft in den Warteschlangen der Prioritäten i mit  $1 \leq i \leq k$  jeweils  $n_i$  Aufträge vorfindet.

$W'_k$  durch diese Aufträge verursachte Wartezeit

$W''_k$  Wartezeit verursacht durch Aufträge, die während der Wartezeit des markierten neu in den Warteschlangen  $q_1$  bis  $q_{k-1}$  ankommen

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.40

Dann gilt

$$\begin{aligned} E[W_k] &= E[R] + E[W'_k] + E[W''_k] \\ &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k E[R_k] \right) + E[W'_k] + E[W''_k] \\ &= \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda E[S_k^2] \right) + E[W'_k] + E[W''_k]. \end{aligned}$$

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.41

Nach Definition ist

$$E[W_k] = \sum_{i=1}^k E[N_i]E[S_i]$$

Anwendung des Theorems von Little mit  $\rho_i = \lambda_i E[S_i]$

$$E[W_k] = \sum_{i=1}^k \lambda_i E[W_i]E[S_i] = \sum_{i=1}^k \rho_i E[W_i].$$

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.42

Außerdem gilt

$$E[W_k'''] = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i E[W_k]E[S_i] = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i E[W_k]$$

und somit

$$E[W_k] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2] + \sum_{i=1}^k \rho_i E[W_i] + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i E[W_k].$$

Durch Auflösen nach  $E[W_k]$  erhält man

$$E[W_k] = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2] + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i E[W_i]}{1 - \sum_{i=1}^k \rho_i}.$$

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.43

**BP 2****Die analytische Methode:  $E[W(t)]$  bei Prioritäten**

Setzt man  $\beta_0 = 0$  und  $\beta_i = \sum_{j=1}^i \rho_j$  für  $i > 0$ , so kann man mittels vollständiger Induktion über  $k$  zeigen:

$$1 + \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{(1-\beta_{i-1})(1-\beta_i)} = \frac{1}{1-\beta_k}.$$

Für  $k = 1$  besagt dies nämlich

$$1 + \frac{\rho_1}{(1-\beta_0)(1-\beta_1)} = \frac{1}{1-\beta_1},$$

was trivialerweise richtig ist.

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

**4.44****BP 2****Die analytische Methode:  $E[W(t)]$  bei Prioritäten**

Unter der Annahme, daß die Aussage für  $k$  richtig ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\rho_i}{(1-\beta_{i-1})(1-\beta_i)} &= \frac{1}{1-\beta_k} + \frac{\rho_{k+1}}{(1-\beta_k)(1-\beta_{k+1})} \\ &= \frac{1-\beta_{k+1} + \rho_{k+1}}{(1-\beta_k)(1-\beta_{k+1})} \\ &= \frac{1}{1-\beta_{k+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Weiter ist } E[W_1] = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_0)(1-\beta_1)}.$$

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

**4.45**

Gilt zudem für  $k \leq n$  die Beziehung  $E[W_k] = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_{k-1})(1-\beta_k)} ,$

$$\text{so errechnet man } E[W_{n+1}] = \frac{\left( \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2] \right) \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{(1-\beta_{i-1})(1-\beta_i)} \right)}{2(1-\beta_{n+1})}$$

$$= \frac{\left( \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2] \right) \frac{1}{1-\beta_n}}{2(1-\beta_{n+1})} .$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich somit  $E[W_k] = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_{k-1})(1-\beta_k)} .$

□ **Shortest Job First**

$$\begin{aligned}
 E[W(t)] &= \frac{\lambda}{\mu^2} \left( 1 + \lambda t e^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu t} - \frac{\lambda}{\mu} \right)^{-2} \\
 &= \frac{\lambda}{\mu^2} (1 - \rho + \rho e^{-\mu t} (1 + \mu t))^{-2} \\
 &= \frac{\rho}{\mu (1 - \rho (1 - e^{-\mu t} (1 + \mu t)))^{-2}}.
 \end{aligned}$$

**Beweis:**

$g_i$  Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag  $i > 0$  Quanten benötigt.

$B(t)$  Bedienzeitverteilung

Mit  $\lambda_k = \lambda g_k$  und  $\rho_k = kQ\lambda g_k$  verhält sich das System wie ein Prioritätensystem.

Es gilt deshalb

$$\begin{aligned}
 E[W_k] &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]}{2(1 - \beta_{k-1})(1 - \beta_k)} \\
 &= \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda H_{k-1}(S))(1 - \lambda H_k(S))}
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } H_i(S) = \sum_{j=1}^i (jQg_j).$$

Setzt man  $t = kQ$  und betrachtet den Grenzübergang  $Q \rightarrow 0$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 E[W(t)] &= \frac{1}{2} \lambda E[S^2] (1 - \lambda H_{t/Q}(S))^{-2} \\
 &= \frac{1}{2} \lambda E[S^2] \left( 1 - \lambda \int_0^t i dB(i) \right)^{-2}.
 \end{aligned}$$

Im Spezialfall  $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$  ergibt sich

$$E[W(t)] = \frac{\lambda}{\mu^2} \left( 1 - \lambda \int_0^t x \mu e^{-\mu x} dx \right)^{-2}.$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$\int_0^t x \mu e^{-\mu x} dx = -te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} + \frac{1}{\mu}.$$

Einsetzung in die obige Formel liefert

$$\begin{aligned} E[W(t)] &= \frac{\lambda}{\mu^2} \left( 1 + \lambda te^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu t} - \frac{\lambda}{\mu} \right)^{-2} \\ &= \frac{\lambda}{\mu^2} (1 - \rho + \rho e^{-\mu t} (1 + \mu t))^{-2} \\ &= \frac{\rho}{\mu (1 - \rho (1 - e^{-\mu t} (1 + \mu t)))^2}. \end{aligned}$$



### Multi Level Feed Back (MLFB)

$$E[W(t)] = \frac{\frac{\lambda}{2} \int_0^t x^2 dB(x) + t^2 (1 - B(t))}{\left( 1 - \lambda \int_0^t x dB(x) - \lambda t (1 - B(t)) \right)^2} + \frac{t}{1 - \lambda \int_0^t x dB(x) - \lambda t (1 - B(t))} - t$$

Für  $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$  ermittelt man hieraus

$$E[W(t)] = \frac{1}{\mu} \frac{\rho - (\lambda t + \rho) e^{-\mu t}}{\left( 1 - \rho (1 - e^{-\mu t}) \right)^2} + \frac{t}{1 - \rho (1 - e^{-\mu t})} - t.$$

**BP 2****Die analytische Methode:  $E[W(t)]$  bei MLFB****Beweis**

$g_i$  Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag  $i > 0$  Quanten benötigt.

$W_k$  Wartezeit für Aufträge mit  $k$  Quanten Bedienzeit

$W'_k$  Durch diese Aufträge verursachte Wartezeit

$W''_k$  Wartezeit verursacht durch Aufträge, die während der Wartezeit des markierten neu in den Warteschlangen  $q_1$  bis  $q_{k-1}$  ankommen

$S_k$  Bedienzeit, die ein Auftrag während seiner Verweilzeit in den ersten  $k$  Warteschlangen verbraucht

Mit diesen Bezeichnungen ist  $E[S_k] = \sum_{i=1}^k ((mp)^i Q) g_i + kQ \left(1 - \sum_{i=1}^k g_i\right)$ .

Weiter gilt  $E[W'_k] = \lambda(E[W_k] + (k-1)Q)E[S_{k-1}]$ .

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.52

**BP 2****Die analytische Methode:  $E[W(t)]$  bei MLFB**

Modifiziert man die Abarbeitung in der Art, daß jeder Auftrag sofort  $k$  Quanten zugeteilt bekommt und anschließend nach *MLFB* weiterverfahren wird, so hat dies keinen Einfluß auf die Verweilzeit von Aufträgen mit mehr als  $k$  Quanten Bedienzeitbedarf.

Bezeichnet man mit  $\bar{W}_i$  (bzw.  $\bar{Q}_i$ ) die Wartezeit für Aufträge in der  $i$ -ten Warteschlange (bzw. die Warteschlangenlänge) des neu konstruierten Systems, so gilt

$$E[\bar{W}_1] = E[\bar{R}] + E[\bar{Q}_1]E[\bar{S}_1],$$

wobei  $E[\bar{W}_1] = E[W'_k]$  ist und  $E[\bar{S}_1] = E[S_k]$ .

Unter Benutzung des Theorems von Little folgert man

$$E[\bar{W}_1] = E[\bar{R}] + \lambda E[\bar{W}_1]E[\bar{S}_1].$$

Also ist  $E[\bar{W}_1] = \frac{E[\bar{R}]}{1 - \lambda E[\bar{S}_1]}$ .

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.53

**BP 2****Die analytische Methode:  $E[W(t)]$  bei MLFB**

Sei  $\bar{\lambda}_i$  für  $i \geq 2$  die Ankunftsrate in der  $i$ -ten Warteschlange des neuen Systems, dann gilt

$$\bar{\lambda}_i = \lambda \sum_{j=k+i-1}^{\infty} g_j = \lambda(1 - G(k+i-2))$$

$$\text{mit } G(j) = \sum_{i=1}^j g_i$$

und somit

$$\begin{aligned} E[\bar{R}] &= \frac{\lambda}{2} E[S_k^2] + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_i}{2} Q^2 \\ &= \frac{\lambda}{2} E[S_k^2] + \frac{\lambda}{2} Q^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 - G(k+i)) \end{aligned}$$

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.54

**BP 2****Die analytische Methode:  $E[W(t)]$  bei MLFB**

Also ist

$$\begin{aligned} E[W_k] &= E[W_k'] + E[W_k''] \\ &= \frac{E[\bar{R}]}{1 - \lambda E[\bar{S}_1]} + \lambda(E[W_k] + (k-1)Q)E[S_{k-1}] \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} E[W_k] &= \frac{\lambda E[\bar{R}] + \lambda Q(k-1)E[S_{k-1}]}{(1 - \lambda E[S_{k-1}]) (1 - \lambda E[S_k])} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{2} E[S_k^2] + \frac{\lambda}{2} Q^2 \sum_{i=k}^{\infty} (1 - G(i))}{(1 - \lambda E[S_{k-1}]) (1 - \lambda E[S_k])} + \frac{\lambda E[S_{k-1}]}{1 - \lambda E[S_{k-1}]} (k-1)Q \end{aligned}$$

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg  
ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.55

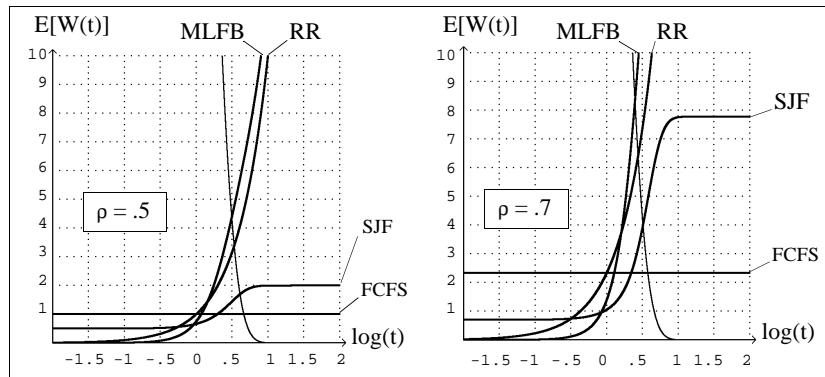
Der Grenzübergang  $Q \rightarrow 0$  liefert mit  $t = kQ$

$$E[W(t)] = \frac{\frac{\lambda}{2} \int_0^t x^2 dB(x) + t^2(1 - B(t))}{\left(1 - \lambda \int_0^t x dB(x) - \lambda t(1 - B(t))\right)^2} + \frac{t}{1 - \lambda \int_0^t x dB(x) - \lambda t(1 - B(t))} - t.$$

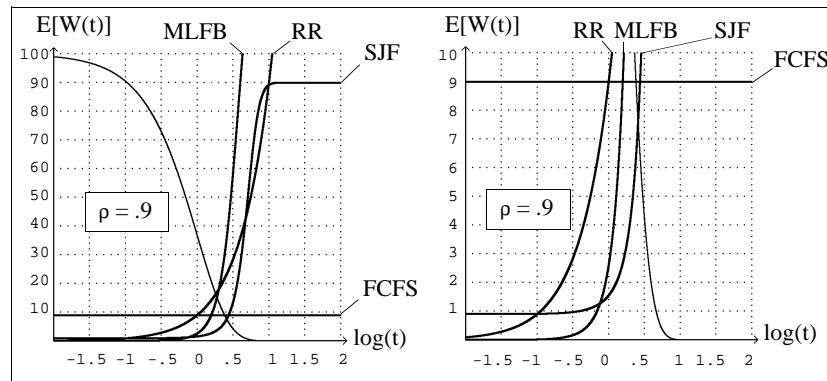
Für  $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$  ermittelt man hieraus

$$E[W(t)] = \frac{1}{\mu} \frac{\rho - (\lambda t + \rho)e^{-\mu t}}{\mu(1 - \rho(1 - e^{-\mu t}))^2} + \frac{t}{1 - \rho(1 - e^{-\mu t})} - t.$$

Graphische Darstellung der Ergebnisse



Wartezeit der Strategien *FCFS*, *SJF*, *RR* und *MLFB* bei 50% und 70% Auslastung der Bedienstation



Wartezeit der Strategien *FCFS*, *SJF*, *RR* und *MLFB* bei 90% Auslastung der Bedienstation

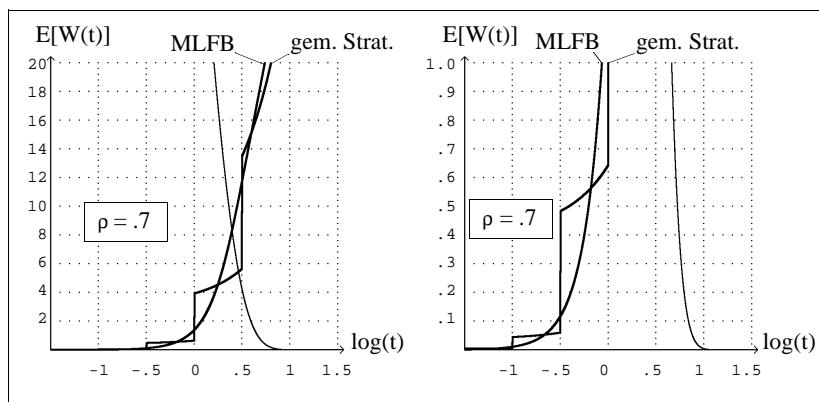
18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.58



Gemischte Strategien



Gemischte Strategie bei exponentieller Bedienzeitverteilung mit  $a[0] = 0$ ,  $a[i] = 10^{(i-4)/2}$  für  $1 \leq i \leq 7$  und  $a[8] = \infty$  unter ausschließlicher Verwendung von *FCFS* im Vergleich mit *MLFB*.

Die Auslastung  $\rho$  ist 0.7, Zeiteinheit ist die mittlere Bedienzeit. Die dünn gezeichnete Kurve gibt an, für wieviel Prozent der Aufträge die Bedienzeit länger ist als der jeweilige Abszissenwert.

18.06.99

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann  
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

4.59