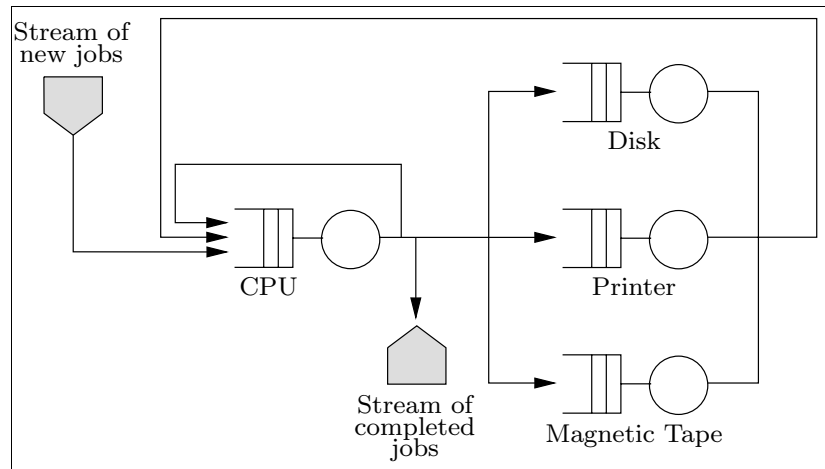
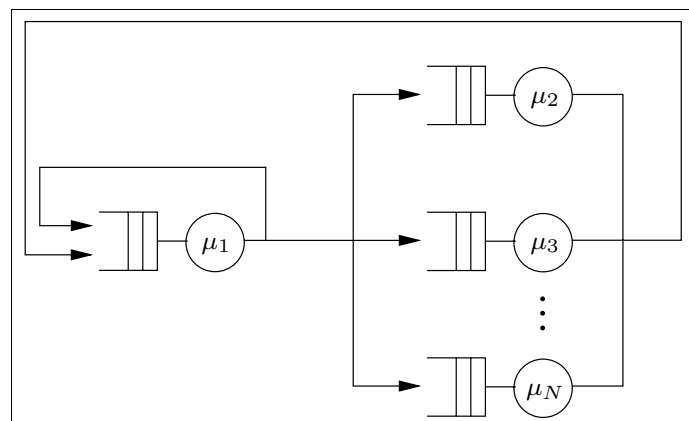


E Warteschlangennetze

- ◆ Rechensystem modelliert als **offenes** Warteschlangennetzwerk



- ◆ "Central-Server-Modell" : Rechensystem modelliert als **geschlossenes** Warteschlangennetzwerk



E.1 Beschreibung

■ Notation

N	Number of nodes
K	The constant number of jobs in a closed network
$(k_1, k_2, \dots, k_N)$	The state of the network
k_i	The number of jobs at the i th node; for closed networks $\sum_{i=1}^N k_i = K$
m_i	The number of parallel servers at the i th node ($m_i \geq 1$)
μ_i	Service rate of the jobs at the i th node
$1/\mu_i$	The mean service time of the jobs at the i th node

p_{ij}	Routing probability, the probability that a job is transferred to the j th node after service completion at the i th node. (In open networks, the node with index 0 represents the external world to the network.)
p_{0j}	The probability that a job entering the network from outside first enters the j th node
p_{i0}	The probability that a job leaves the network just after completing service at node i ($p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^N p_{ij}$).
λ_{0i}	The arrival rate of jobs from outside to the i th node
λ	The overall arrival rate from outside to an open network $(\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_{0i})$
λ_i	the overall arrival rate of jobs at the i th node

■ Grundlegende Gleichungen:

◆ **Verkehrsflussgleichungen** (Verkehrsflussgleichgewicht):

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^N \lambda_j p_{ji}, \quad \text{for } i = 1, \dots, N$$

► Für geschlossene Netzwerke:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^N \lambda_j p_{ji}, \quad \text{for } i = 1, \dots, N$$

◆ **Besuchshäufigkeit** (Besuchsrate, relative Ankunftsrate):

$$e_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad \text{for } i = 1, \dots, N$$

mit λ : Gesamtankunftsrate des Netzwerks

► Offene Netzwerke:

$$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^N e_j p_{ji}, \quad \text{for } i = 1, \dots, N$$

► Geschlossene Netzwerke:

$$e_i = \sum_{j=1}^N e_j p_{ji}, \quad \text{for } i = 1, \dots, N$$

E.2 Leistungsgrößen

◆ Zustandswahrscheinlichkeit:

$$\pi(k_1, \dots, k_N)$$

Wahrscheinlichkeit, Netz ist im Zustand $(k_1, \dots, k_N)$

◆ Randwahrscheinlichkeit ($P(k$ Aufträge im Knoten $i)$):

➤ Offene Netzwerke:

$$\pi_i(k) = \sum_{k_i=k} \pi(k_1, \dots, k_N)$$

Normalisierungsbedingung:

$$\sum \pi(k_1, \dots, k_N) = 1$$

➤ Geschlossene Netzwerke (Anzahl der Aufträge ist konstant):

$$\sum_{j=1}^N k_j = K \text{ with } (0 \leq k_j \leq K)$$

$$\pi_i(k) = \sum_{\substack{\mathbb{P}^N \\ j=1 \\ \& k_j=K \\ \& k_i=k}} \pi(k_1, \dots, k_N)$$

Normalisierungsbedingung:

$$\sum_{\substack{\mathbb{P}^N \\ j=1 \\ k_j=K}} \pi(k_1, \dots, k_N) = 1$$

◆ **Auslastung** von Knoten i :

► $m_i = 1$:

$$\rho_i = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_i(k)$$

oder:

$$\rho_i = 1 - \pi_i(0)$$

► $m_i > 1$:

$$\rho_i = \frac{1}{m_i} \sum_{k=0}^{\infty} \min(m_i, k) \pi_i(k) = 1 - \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{m_i - k}{m_i} \cdot \pi_i(k)$$

oder:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{m_i \mu_i}$$

◆ **Durchsatz** durch Knoten i :

$$\lambda_i = m_i \cdot \rho_i \cdot \mu_i$$

► Wenn die Bedienrate abhängig ist von der Anzahl der Aufträge im Knoten (lastabhängiger Knoten):

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_i(k) \mu_i(k)$$

Beispiel für einen lastabhängigen Knoten → M/M/m-Knoten:

$$\mu_i(k) = \min(k, m_i) \cdot \mu_i$$

mit μ_i : Bedienrate einer einzelnen BE

◆ **Gesamtdurchsatz:**

➤ Offenes Netz:

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_{0i}$$

➤ Geschlossenes Netz:

$$\lambda = \frac{\lambda_i}{e_i}$$

◆ **Mittlere Anzahl der Aufträge** im Knoten i :

$$\bar{K}_i = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \pi_i(k)$$

mit Little's Gesetz:

$$\bar{K}_i = \lambda_i \cdot \bar{T}_i$$

◆ **Mittlere WS-Länge** von Knoten i :

$$\bar{Q}_i = \sum_{k=m_i}^{\infty} (k - m_i) \cdot \pi_i(k)$$

mit Little:

$$\bar{Q}_i = \lambda_i \bar{W}_i$$

- ◆ Mittlere **Antwortzeit** von Knoten i (mit Little):

$$\bar{T}_i = \frac{\bar{K}_i}{\lambda_i}$$

- ◆ Mittlere **Gesamtantwortzeit** (mit Little):

$$\bar{T} = \frac{\bar{K}}{\lambda}$$

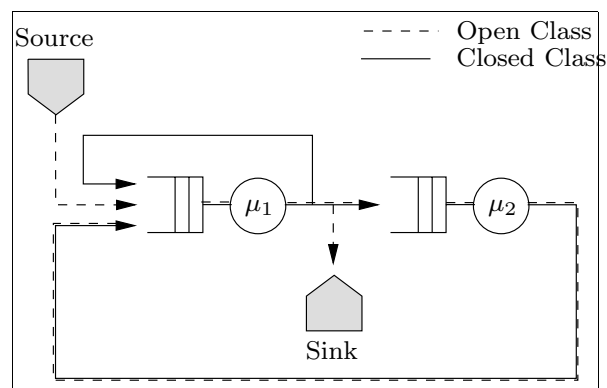
- ◆ Mittlere **Wartezeit** von Knoten i :

$$\bar{W}_i = \bar{T}_i - \frac{1}{\mu_i}$$

E.3 WS-Netze mit mehreren Auftragsklassen

E.3 WS-Netze mit mehreren Auftragsklassen

- Es sind gleichzeitig Aufträge **unterschiedlicher Klassen** im Netz
- Die Aufträge unterschiedlicher Klassen haben unterschiedliche **Bedienraten** und unterschiedliche **Übergangswahrscheinlichkeiten**
- Es gibt auch **gemischte** Netze mit offenen und geschlossenen Klassen:



1 Notation

R The number of job classes in a network

k_{ir} The number of jobs of the r th class at the i th node; for a closed network:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R k_{ir} = K \quad (0.1)$$

K_r The number of jobs of the r th class in the network; not necessarily constant, even in a closed network:

$$\sum_{i=1}^N k_{ir} = K_r \quad (0.2)$$

$\mathbf{K}$ The number of jobs in the various classes, known as the population vector ($\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_R)$)

$\mathbf{S}_i$ The state of the i th node ($\mathbf{S}_i = (k_{i1}, \dots, k_{iR})$):

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i = \mathbf{K} \quad (0.1)$$

$\mathbf{S}$ The overall state of the network with multiple classes ($\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_N)$)

μ_{ir} The service rate of the i th node for jobs of the r th class

$p_{ir,js}$ The probability that a job of the r th class at the i th node is transferred to the s th class and the j th node (routing probability)

$p_{0,js}$ The probability in an open network that a job from outside the network enters the j th node as a job of the s th class

$p_{ir,0}$ The probability in an open network that a job of the r th class leaves the network after having been serviced at the i th node, so:

$$p_{ir,0} = 1 - \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^R p_{ir,js} \quad (0.2)$$

- λ The overall arrival rate from outside to an open network
 $\lambda_{0,ir}$ The arrival rate from outside to node i for class r jobs ($\lambda_{0,ir} = \lambda \cdot p_{0,ir}$)
 λ_{ir} The arrival rate of jobs of the r th class at the i th node:

$$\lambda_{ir} = \lambda \cdot p_{0,ir} + \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^R \lambda_{js} \cdot p_{js,ir} ; \quad (0.1)$$

for closed networks, $p_{0,ir} = 0$ ($1 < i < N$, $1 < r < R$) and we obtain:

$$\lambda_{ir} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^R \lambda_{js} \cdot p_{js,ir} . \quad (0.2)$$

The mean number of visits e_{ir} of a job of the r th class at the i th node of an open network can be determined from the routing probabilities:

$$e_{ir} = p_{0,ir} + \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^R e_{js} p_{js,ir} , \quad \text{for } i = 1, \dots, N, \quad r = 1, \dots, R. \quad (0.1)$$

For closed networks, the corresponding equation is:

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^R e_{js} p_{js,ir} , \quad \text{for } i = 1, \dots, N, \quad r = 1, \dots, R. \quad (0.2)$$

Usually we assume that $e_{1r} = 1$, for $r = 1, \dots, R$, although other settings are also possible.

2 Leistungsgrößen

◆ Zustandswahrscheinlichkeit:

$$\pi(S_1, \dots, S_N)$$

Wahrscheinlichkeit, Netz ist im Zustand $(S_1, \dots, S_N)$

◆ Randwahrscheinlichkeit ($P(\text{Knoten } i \text{ ist im Zustand } k) = P(S_i = k)$):

➤ Offene Netze:

$$\pi_i(k) = \sum_{s_i=k} \pi(S_1, \dots, S_N)$$

➤ Geschlossene Netze:

$$\pi_i(k) = \sum_{\substack{\mathbf{P} \\ j=1 \\ \& S_j=K \\ \& S_i=k}} \pi(S_1, \dots, S_N),$$

◆ Auslastung von Knoten i mit Aufträgen der Klasse r :

$$\rho_{ir} = \frac{1}{m_i} \sum_{\substack{\text{all states } \mathbf{k} \\ \text{with } k_r > 0}} \pi_i(\mathbf{k}) \frac{k_{ir}}{k_i} \min(m_i, k_i), \quad k_i = \sum_{r=1}^R k_{ir}$$

oder:

$$\rho_{ir} = \frac{\lambda_{ir}}{m_i \mu_{ir}}$$

◆ **Durchsatz** von Knoten i mit Aufträgen der Klasse r :

$$\lambda_{ir} = \sum_{\substack{\text{all states } \mathbf{k} \\ \text{with } k_r > 0}} \pi_i(\mathbf{k}) \frac{k_{ir}}{k_i} \mu_i(k_i)$$

oder:

$$\lambda_{ir} = m_i \cdot \rho_{ir} \cdot \mu_{ir}$$

◆ **Gesamtdurchsatz** durch das Netz mit Aufträgen der Klasse r :

➤ Offenes Netz:

$$\lambda_r = \sum_{i=1}^N \lambda_{0,ir}$$

➤ Geschlossenes Netz:

$$\lambda_r = \frac{\lambda_{ir}}{e_{ir}}$$

◆ **Mittlere Anzahl von Aufträgen** der Klasse r in Knoten i :

$$\bar{K}_{ir} = \sum_{\substack{\text{all states } \mathbf{k} \\ \text{with } k_r > 0}} k_r \cdot \pi_i(\mathbf{k})$$

Little:

$$\bar{K}_{ir} = \lambda_{ir} \cdot \bar{T}_{ir}$$

◆ **Mittlere WS-Länge** von Aufträgen der Klasse r in Knoten i :

$$\bar{Q}_{ir} = \lambda_{ir} \bar{W}_{ir}$$

- ◆ Mittlere **Antwortzeit** von Aufträgen der Klasse r bei Knoten i :

$$\bar{T}_{ir} = \frac{\bar{K}_{ir}}{\lambda_{ir}}$$

- ◆ Mittlere **Wartezeit** von Aufträgen der Klasse r bei Knoten i :

$$\bar{W}_{ir} = \bar{T}_{ir} - \frac{1}{\mu_{ir}}$$