

E.4 Markovanalyse

- ◆ Das Verhalten vieler WS-Netze kann durch "Kontinuierliche Markov-Ketten" (Markov Chain, MK) beschrieben werden.
- ◆ Die MK wird charakterisiert durch die möglichen Zustände und die Übergangsraten zwischen diesen Zuständen des WS-Netzes
- ◆ Für WS-Netze im stationären Gleichgewicht gelten die Flussgleichungen:

$$\sum_{j \in S} \pi_j q_{ji} = \pi_i \sum_{j \in S} q_{ij}, \quad \forall i \in S$$

- S : Zustandsraum (Menge aller Zustände des WS-Netzes)
- q_{ij} : Übergangsrate vom Zustand i nach Zustand j
- π_i : Zustandswahrscheinlichkeit für den Zustand i

E.4 Markovanalyse

- ◆ Anschauliche Interpretation:

Summe der Übergangsraten **in** einen Zustand
= Summe der Übergangsraten **aus** diesem Zustand

- ◆ Das Markov'sche Gleichungssystem kann umgeschrieben werden zu:

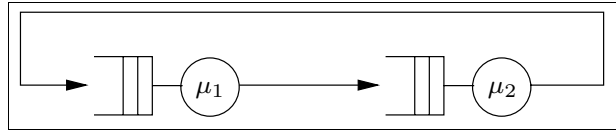
$$\forall i \in S : \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} - \pi_i \sum_{j \neq i} q_{ij} = 0$$

- ◆ Oder in Matrixform:

$$\pi Q = 0$$

- π : Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten $(\pi_1, \dots, \pi_n)$
- Q : Generatormatrix mit den Übergangsraten q_{ij} und $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$

◆ Beispiel: Geschlossenes Tandemnetzwerk

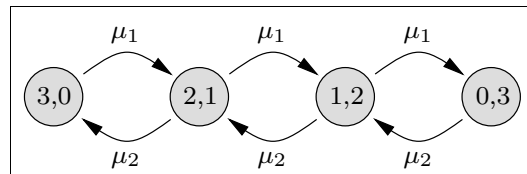


- Zahl der Aufträge $K = 3$
- Bedienzeiten exp. verteilt mit: $1/\mu_1 = 5 \text{ sec}$ und $1/\mu_2 = 2.5 \text{ sec}$
- Strategie: FCFS
- Zustandsraum der MK:

$$\{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\}$$

- Zustand: $(k_1, k_2) \rightarrow k_1$ Aufträge in Knoten 1 und k_2 Aufträge in Knoten 2
- Zustandswahrscheinlichkeit: $\pi(k_1, k_2)$

- Zustandsübergangsdiagramm oder Zustandsdiagramm:



- Flussgleichungen, Markov'sches Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\pi(3, 0)\mu_1 &= \pi(2, 1)\mu_2, \\ \pi(2, 1)(\mu_1 + \mu_2) &= \pi(3, 0)\mu_1 + \pi(1, 2)\mu_2, \\ \pi(1, 2)(\mu_1 + \mu_2) &= \pi(2, 1)\mu_1 + \pi(0, 3)\mu_2, \\ \pi(0, 3)\mu_2 &= \pi(1, 2)\mu_1.\end{aligned}$$

► Generatormatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_1 + \mu_2) & \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_1 + \mu_2) & \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu_2 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

► Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$\pi = (\pi(3, 0), \pi(2, 1), \pi(1, 2), \pi(0, 3))$$

► Generatormatrix mit $\mu_1 = 0.2$ und $\mu_2 = 0.4$:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

► Durch Lösung des Gleichungssystems $\pi Q = 0$ erhält man die Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$\pi(3, 0) = \underline{0.5333}, \quad \pi(2, 1) = \underline{0.2667}, \quad \pi(1, 2) = \underline{0.1333}, \quad \pi(0, 3) = \underline{0.0667}$$

► Und aus den Zustandswahrscheinlichkeiten die Randwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} \pi_1(0) = \pi_2(3) = \pi(0, 3) &= \underline{0.0667}, & \pi_1(1) = \pi_2(2) = \pi(1, 2) &= \underline{0.1333}, \\ \pi_1(2) = \pi_2(1) = \pi(2, 1) &= \underline{0.2667}, & \pi_1(3) = \pi_2(0) = \pi(3, 0) &= \underline{0.5333}. \end{aligned}$$

► Auslastungen:

$$\rho_1 = 1 - \pi_1(0) = \underline{0.9333}, \quad \rho_2 = 1 - \pi_2(0) = \underline{0.4667}.$$

► Durchsatz:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \rho_1 \mu_1 = \rho_2 \mu_2 = \underline{0.1867}.$$

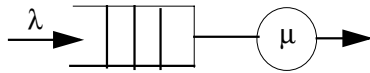
► Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\bar{K}_1 = \sum_{k=1}^3 k \pi_1(k) = \underline{2.2667}, \quad \bar{K}_2 = \sum_{k=1}^3 k \pi_2(k) = \underline{0.7333}.$$

► Mittlere Antwortzeit:

$$\bar{T}_1 = \frac{\bar{K}_1}{\lambda_1} = \underline{12.1429}, \quad \bar{T}_2 = \frac{\bar{K}_2}{\lambda_2} = \underline{3.9286}.$$

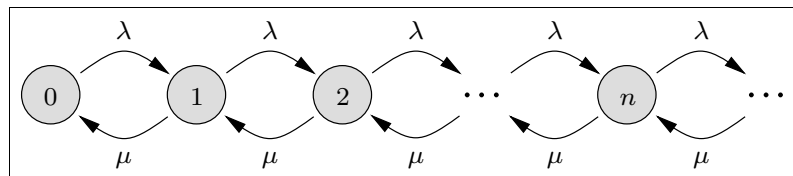
◆ Beispiel: M/M/1 - Wartesystem:



► Zustandsraum der MK:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

► Zustandsdiagramm:



► Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \dots)$$

► Generatormatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

► Flussgleichungen, Markov'sches Gleichungssystem:

$$0 = -\pi_0 \lambda + \pi_1 \mu,$$

$$0 = -\pi_k (\lambda + \mu) + \pi_{k-1} \lambda + \pi_{k+1} \mu, \quad k \geq 1$$

- Für die ZW'n π_1 und π_2 erhält man:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0, \quad \pi_2 = \frac{\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot \mu} \pi_0$$

- Und allgemein:

$$\pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \pi_0$$

- Mit der Normalisierungsbedingung:

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

- Mit der Auslastung $\rho = \lambda/\mu$:

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

- ZW'n eines M/M/1 - Wartesystems:

$$\pi_k = (1 - \rho) \rho^k$$

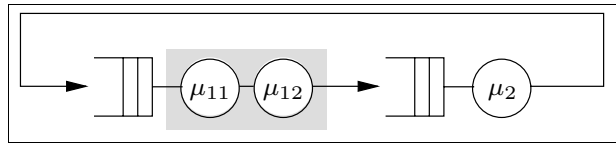
- Auslastung eines M/M/1 - Wartesystems:

$$\rho = 1 - \pi_0$$

- Mittlere Anzahl der Aufträge in einem M/M/1 - Wartesystem:

$$\bar{K} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

- ◆ Beispiel: Geschlossenes Tandemnetz mit einer E_2 -verteilten BE:

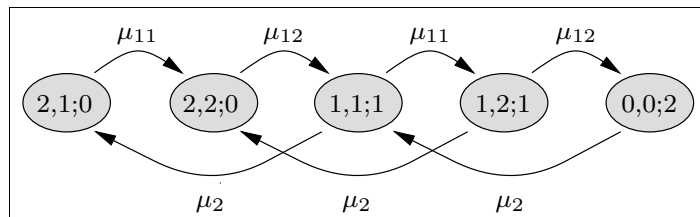


- Zahl der Aufträge: $K = 2$
- Bedienzeiten:
 - BE_2 : exp. verteilt mit $\mu_2 = 0.4$
 - BE_1 : E_2 -verteilt mit den Raten der beiden Phasen $\mu_{11} = \mu_{12} = 0.4$
- Zustand des Netzes ist gegeben durch Anzahl der Aufträge in den Knoten, sondern auch durch die Phase $l = 0, 1, 2$ eines Auftrags in Knoten 1:

$$(k_1, l; k_2)$$

- ZW des Netzes:
- $$p(k_1, l; k_2)$$

- Zustandsdiagramm:



- Flussgleichungen:

$$\begin{aligned} \pi(2, 1; 0)\mu_{11} &= \pi(1, 1; 1)\mu_2, \\ \pi(2, 2; 0)\mu_{12} &= \pi(2, 1; 0)\mu_{11} + \pi(1, 2; 1)\mu_2, \\ \pi(1, 1; 1)(\mu_{11} + \mu_2) &= \pi(2, 2; 0)\mu_{12} + \pi(0, 0; 2)\mu_2, \\ \pi(1, 2; 1)(\mu_{12} + \mu_2) &= \pi(1, 1; 1)\mu_{11}, \\ \pi(0, 0; 2)\mu_2 &= \pi(1, 2; 1)\mu_{12}. \end{aligned}$$

- Generatormatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu_{11} & \mu_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_{12} & \mu_{12} & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(\mu_{11} + \mu_2) & \mu_{11} & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & -(\mu_{12} + \mu_2) & \mu_{12} \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

- Einsetzen der Werte für die Bedienraten:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & -0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & -0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & -0.4 \end{pmatrix}$$

- Lösung des Gleichungssystems $\pi Q = 0$ oder der Flussgleichungen ergibt für die ZW'n:

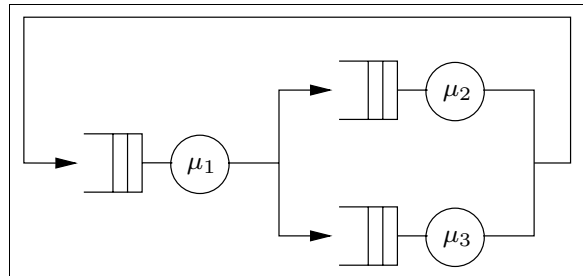
$$\begin{aligned} \pi(2, 1; 0) &= \underline{0.2219}, & \pi(2, 2; 0) &= \underline{0.3336}, \\ \pi(1, 1; 1) &= \underline{0.2219}, & \pi(1, 2; 1) &= \underline{0.1102}, \\ \pi(0, 0; 2) &= \underline{0.1125}. \end{aligned}$$

- Aus den ZW'n ergibt sich für die Randwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} \pi_1(0) &= \pi_2(2) = \pi(0, 0; 2) = \underline{0.1125}, \\ \pi_1(1) &= \pi_2(1) = \pi(1, 1; 1) + \pi(1, 2; 1) = \underline{0.3321}, \\ \pi_1(2) &= \pi_2(0) = \pi(2, 1; 0) + \pi(2, 2; 0) = \underline{0.5555}. \end{aligned}$$

- Aus den Randwahrscheinlichkeiten können alle anderen Leistungsgrößen ermittelt werden.

◆ Beispiel: Einfaches Geschlossenes WS-Netzwerk:



- Zahl der Aufträge $K = 2$
- Bedienzeiten exp. verteilt mit: $\mu_1 = 4/\text{sec}$, $\mu_2 = 1/\text{sec}$ und $\mu_3 = 2/\text{sec}$
- Strategie: FCFS

- Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{12} = 0.4, \quad p_{13} = 0.6$$

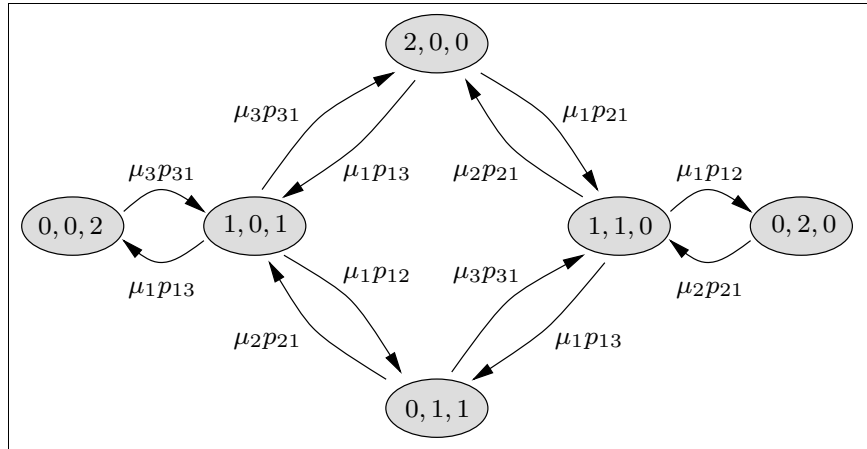
$$p_{21} = p_{31} = 1$$

- Zustandsraum der MK:

$$\{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

- Zustand: $(k_1, k_2, k_3) \rightarrow k_1$ Aufträge in Knoten 1, k_2 Aufträge in Knoten 2 und k_3 Aufträge in Knoten 3
- Zustandswahrscheinlichkeit: $\pi(k_1, k_2, k_3)$

➤ Zustandsdiagramm:



➤ Flussgleichungen:

- (1) $\pi(2, 0, 0)(\mu_1 p_{12} + \mu_1 p_{13}) = \pi(1, 0, 1)\mu_3 p_{31} + \pi(1, 1, 0)\mu_2 p_{21} ,$
- (2) $\pi(0, 2, 0)\mu_2 p_{21} = \pi(1, 1, 0)\mu_1 p_{12} ,$
- (3) $\pi(0, 0, 2)\mu_3 p_{31} = \pi(1, 0, 1)\mu_1 p_{13} ,$
- (4) $\pi(1, 1, 0)(\mu_2 p_{21} + \mu_1 p_{13} + \mu_1 p_{12}) = \pi(0, 2, 0)\mu_2 p_{21} + \pi(2, 0, 0)\mu_1 p_{12} + \pi(0, 1, 1)\mu_3 p_{31} ,$
- (5) $\pi(1, 0, 1)(\mu_3 p_{31} + \mu_1 p_{12} + \mu_1 p_{13}) = \pi(0, 0, 2)\mu_3 p_{31} + \pi(0, 1, 1)\mu_2 p_{21} + \pi(2, 0, 0)\mu_1 p_{13} ,$
- (6) $\pi(0, 1, 1)(\mu_3 p_{31} + \mu_2 p_{21}) = \pi(1, 1, 0)\mu_1 p_{13} + \pi(1, 0, 1)\mu_1 p_{12} .$

■ Lösung des Markov'schen Gleichungssystems:

◆ Iterative numerische Methode:

- Ursprüngliches Gleichungssystem: $\pi Q = 0$
- Multiplikation mit einem Skalar: $\pi Q \Delta = 0$
- Addition von π auf beiden Seiten: $\pi Q \Delta + \pi = \pi$
- Mit der Einheitsmatrix I : $\pi(Q \Delta + I) = \pi$
- Iteration: $\pi^{(j+1)} = \pi^{(j)}(Q \Delta + I)$
- Δ wird so gewählt, dass das Verfahren konvergiert:

$$\Delta = 1/\max |q_{ij}| \quad \text{oder} \quad \Delta = 0.99/\max |q_{ij}|$$

◆ Beispiel Tandemnetzwerk:

- Generatormatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 & -0.4 \end{pmatrix}$$

- Skalar Δ :

$$\Delta = \frac{1}{\max |q_{ii}|} = \frac{1}{0.6} = \underline{1.6667}$$

- Invariante Matrix:

$$(Q \Delta + I) = \begin{pmatrix} 0.6667 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0.6667 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.6667 & 0 & 0.3333 \\ 0 & 0 & 0.6667 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

- Startvektor kann willkürlich festgelegt werden:

$$\pi^{(0)} = (\pi(3, 0), \pi(2, 1), \pi(1, 2), \pi(0, 3))^{(0)}$$

Es muss aber die Normalisierungsbedingung erfüllt sein:

$$\pi(3, 0) + \pi(2, 1) + \pi(1, 2) + \pi(0, 3) = 1$$

- Als Startvektor wird gewählt:

$$\pi^{(0)} = (0.65; 0.35; 0; 0)$$

Iteration	$\pi(3, 0)$	$\pi(2, 1)$	$\pi(1, 2)$	$\pi(0, 3)$
1	0.6667	0.2166	0.1167	0
2	0.5889	0.3000	0.0722	0.0389
3	0.5926	0.2444	0.1259	0.0371
4	0.5580	0.2815	0.1062	0.0543
5	0.5597	0.2568	0.1300	0.0535
6	0.5443	0.2733	0.1213	0.0612
7	0.5450	0.2623	0.1319	0.0608
8	0.5382	0.2696	0.1280	0.0642
9	0.5385	0.2647	0.1327	0.0641
10	0.5355	0.2680	0.1309	0.0656
11	0.5356	0.2658	0.1330	0.0655

- Exakte Werte:

$$\pi(3, 0) = \underline{0.5333}, \pi(2, 1) = \underline{0.2667}, \pi(1, 2) = \underline{0.1333}, \pi(0, 3) = \underline{0.0667}$$

- ◆ Die iterative numerische Methode kann immer angewendet werden, benötigt aber sehr viel Rechenzeit und Speicherplatz
- ◆ Andere Methoden, die schneller sind und weniger Speicherplatz benötigen:
 - Stationäre Lösungsverfahren:
 - Powerverfahren
 - Jakobiverfahren
 - Gauß-Seidel-Verfahren
 - Multilevelverfahren
 - Transiente Lösungsverfahren:
 - Uniformization

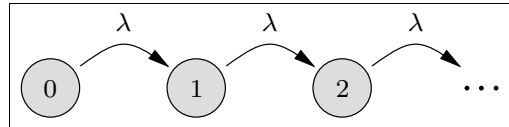
■ Transiente Lösung der Markov'schen Gleichungen:

- ◆ Das Markov'sche Gleichungssystem: $\pi \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ gilt nur für den stationären (eingeschwungenen) Zustand
- ◆ Für den transienten (nichtstationären) Zustand gilt:

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)\mathbf{Q}, \quad \pi(0) = (\pi_0(0), \pi_1(0), \dots)$$

- Im transienten Fall ergibt die Differenz zwischen dem "Fluss in einen Zustand" und dem "Fluss aus diesem Zustand" die Änderung (Ableitung) der Zustandswahrscheinlichkeit.
- Nur für ganz einfache Fälle direkt zu lösen

- ◆ Beispiel: Geburtsprozess (z.B. Ankünfte bei einem Wartesystem):



- Generatormatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Flussgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \pi_0(t) &= -\lambda \pi_0(t), \\ \frac{d}{dt} \pi_k(t) &= -\lambda \pi_k(t) + \lambda \pi_{k-1}(t), \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

- Anfangsbedingungen:

$$\pi_k(0) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases}$$

- Zustandswahrscheinlichkeit des Geburtsprozesses (Poissonprozess):

$$\pi_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \geq 0$$

- Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit t k Geburten stattgefunden haben (k Aufträge angekommen sind)
- Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit t keine Geburt (Ankunft) stattgefunden hat $P(T_A > t)$:

$$\pi_0(t) = e^{-\lambda t}$$

- Verteilung der Zeit zwischen zwei Ankünften:

$$P(T_A \leq t) = 1 - \pi_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

- Zwischenankunftszeit ist exp. verteilt !!

