

# Verlässliche Echtzeitsysteme

## Übungen zur Vorlesung

### Festkommaarithmetik

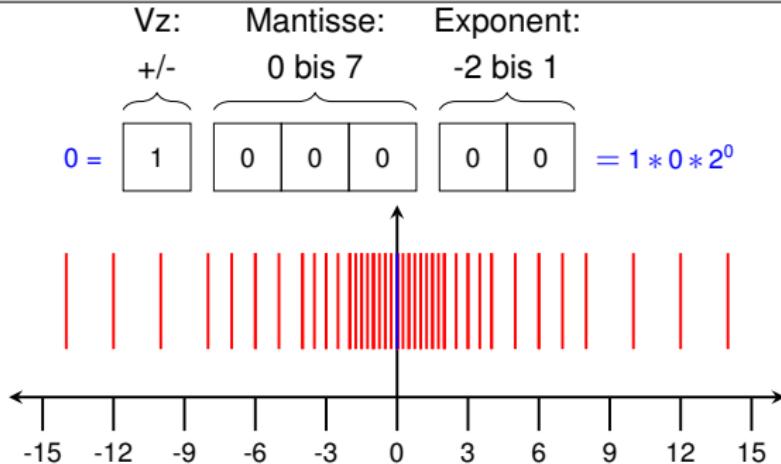
Phillip Raffeck, Simon Schuster, Peter Wägemann

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg  
Lehrstuhl Informatik 4 (Verteilte Systeme und Betriebssysteme)  
<https://www4.cs.fau.de>

Wintersemester 2021



# Fließkommazahlen

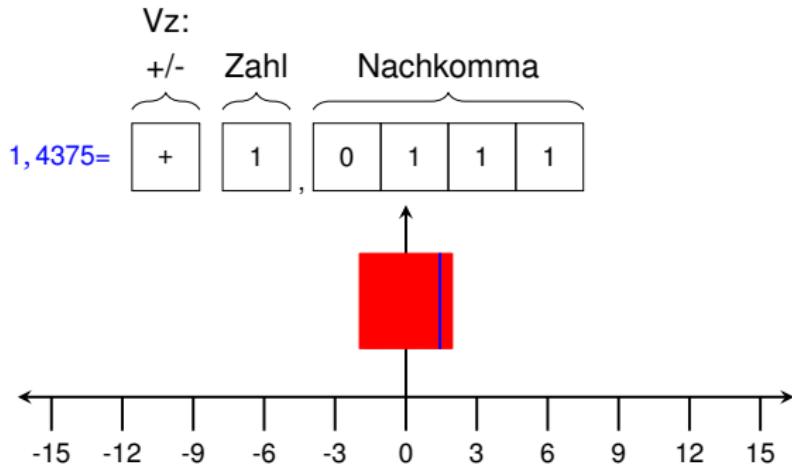


## IEEE 754

- Noch komplexer:
  - normalisierte/denormalisierte Darstellung
  - Rundung, Fehlersemantik, ...
  - NaN,  $\infty$ , ...
- <https://ieeexplore.ieee.org/document/4610935/>



# Festkommazahlen: Grundlagen



## C-Standard und Zahlendarstellung

- Zahlendarstellung im Standard nicht festgelegt:
  - Einerkomplement
  - Vorzeichen und Magnitude
  - Zweierkomplement
- Heute meist Zweierkomplement  $\leadsto$  kein dediziertes Vorzeichenbit



```
func:  
    push {r7, lr}  
    sub sp, #8  
    add r7, sp, #0  
    ldr r3, [pc, #28] ; float a  
    str r3, [r7, #4]  
    ldr r3, [pc, #28] ; float b  
    str r3, [r7, #0]  
    ldr r2, [r7, #4]  
    ldr r3, [r7, #0]  
    adds r0, r2, #0 ; Param 1  
    adds r1, r3, #0 ; Param 2  
    bl 3a6c <__aeabi_fmul>  
    adds r3, r0, #0  
    adds r0, r3, #0  
    mov sp, r7  
    add sp, #8  
    pop {r7, pc}  
  
float func(void){  
    volatile float a = 23.42;  
    volatile float b = 12.34;  
    return a * b;  
}
```

- Setup
  - Plattform: ARM Cortex-M0+
  - Compiler: arm-gcc
- Funktion \_\_aeabi\_fmul : 300 Zeilen Assembler
- Keine Fließkommaeinheit (engl. floating-point unit, FPU) vorhanden
- Emulation der **Fließkommaarithmetik in Software**



- Mikrocontroller ohne *Fließkommaeinheit*
- *Kein EAN* für Fließkommazahlen
  - ↪ *Festkommaarithmetik* mit Ganzzahlen
- Zahlenformat häufig in Q-Notation [1] angegeben
- *Q<sub>m</sub>.n* ↪ Festkommazahl mit
  - $m$  Bit vor dem Komma,  $n$  nach dem Komma, ein Vorzeichenbit
  - Wertebereich:  $[-2^m, 2^m - 2^{-n}]$
  - Auflösung:  $2^{-n}$
- Implementierung für Übungsaufgabe *vorgegeben*

## Implementierung als Integer

↪ passendes Q-Format ist **anwendungsspezifisch**



## von Fließkomma nach Qm.n

1. Multiplikation mit  $2^n$
2. Runden auf die nächste Ganzzahl

## von Qm.n nach Fließkomma

1. Umwandlung in Fließkommazahl  $\rightsquigarrow$  cast
2. Multiplikation mit  $2^{-n}$



- Addition und Subtraktion wie bei Ganzzahlen

## Addition

```
1 int32_t      a = ...;  
2 int32_t      b = ...;  
3 int32_t result = a + b;
```

$$\begin{array}{r} 2,80 \\ + 13_1,37 \\ \hline = 16,17 \end{array}$$

## Subtraktion

```
1 int32_t      a = ...;  
2 int32_t      b = ...;  
3 int32_t result = a - b;
```

$$\begin{array}{r} 16,17 \\ - 2_1,80 \\ \hline = 13,37 \end{array}$$



- Braucht Zwischenergebnis von doppelter Bitbreite

## Multiplikation

```
1 #define K    (1 << (n - 1))  
2 int32_t    a = ...;  
3 int32_t    b = ...;  
4 int64_t temp = (int64_t) a * (int64_t) b;  
5     temp += K;  
6 int32_t result= temp >> n;
```

$$a \cdot b$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{Q.n}{=} (a \cdot 10^n) \cdot (b \cdot 10^n) \\ &= (a \cdot b) \cdot 10^{2n} \\ &\neq (a \cdot b) \cdot 10^n \end{aligned}$$

## Division

```
1 int32_t    a = ...;  
2 int32_t    b = ...;  
3 int64_t temp = (int64_t) a << n;  
4     temp += b / 2;  
5 int32_t result = temp / b;
```

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &\stackrel{Q.n}{=} \frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^n} \\ &= \frac{a}{b} \neq \frac{a}{b} \cdot 10^n \end{aligned}$$

- Siehe Implementierung in fixedpoint.c
- **Vorsicht: Rundungsfehler durch Transformationen**





Erick L. Oberstar.

Fixed-point representation & fractional math.

Technical report, Oberstar Consulting, August 2007.

