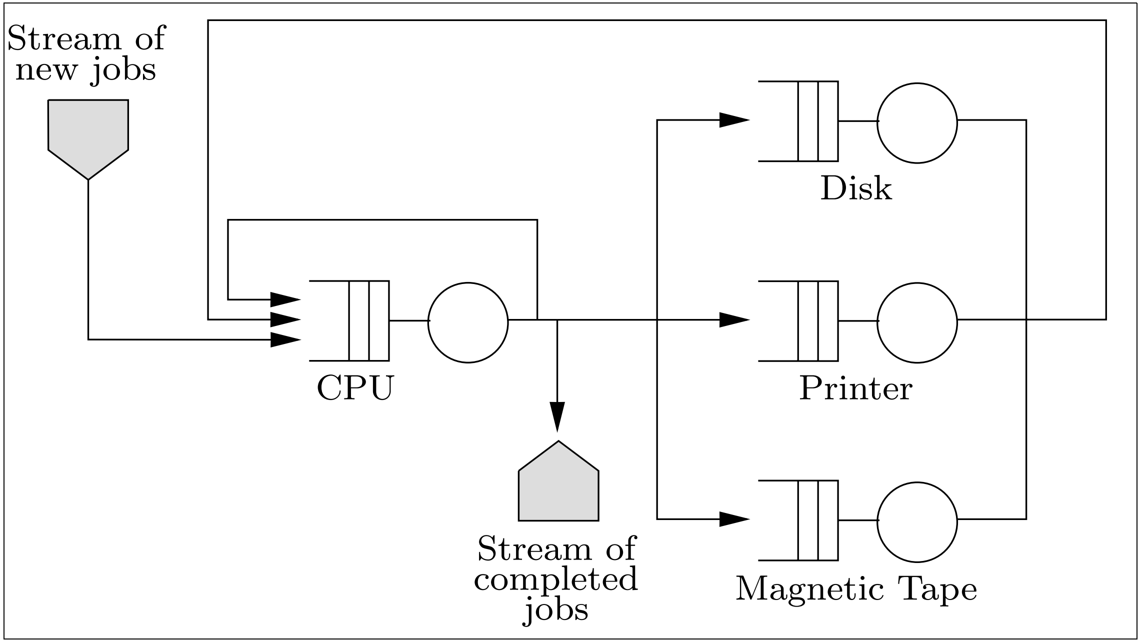
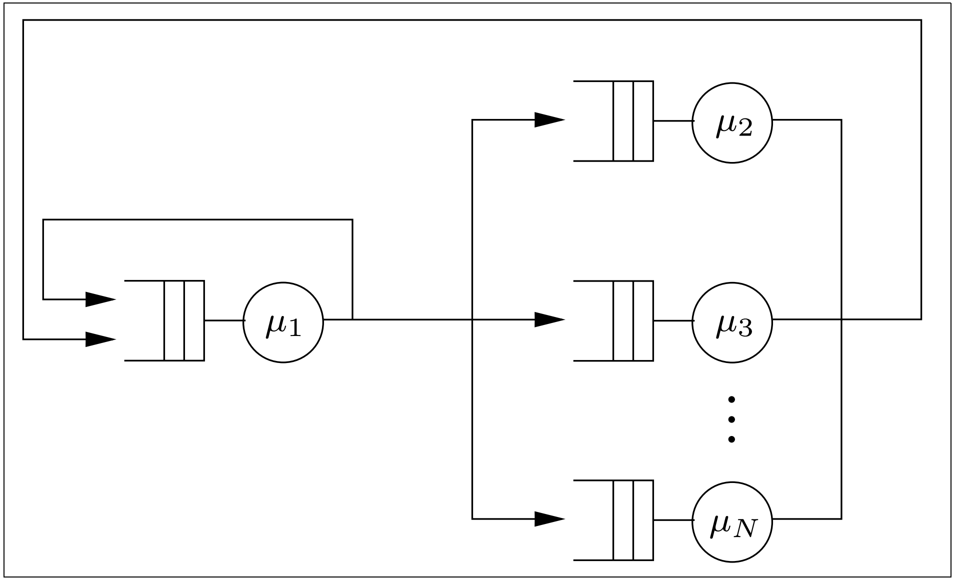
E Warteschlangennetze

◆ Rechensystem modelliert als **offenes** Warteschlangennetzwerk



◆ "Central-Server-Modell" : Rechensystem modelliert als **geschlossenes** Warteschlangennetzwerk



E.1 Beschreibung

- Notation

N	Number of nodes
K	The constant number of jobs in a closed network
$(k_1, k_2, \ldots, k_N)$	The state of the network
k_i	The number of jobs at the ith node; for closed networks $\sum_{i=1}^{N} k_i = K$
m_i	The number of parallel servers at the ith node $(m_i \geq 1)$
μ_i	Service rate of the jobs at the ith node
$1/\mu_i$	The mean service time of the jobs at the ith node

p_{ij}	Routing probability, the probability that a job is transferred to the jth node after service completion at the ith node. (In open networks, the node with index 0 represents the external world to the network.)
p_{0j}	The probability that a job entering the network from outside first enters the jth node
p_{i0}	The probability that a job leaves the network just after completing service at node i ($p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{N} p_{ij}$).
λ_{0i}	The arrival rate of jobs from outside to the ith node
λ	The overall arrival rate from outside to an open network ($\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{0i}$)
λ_i	the overall arrival rate of jobs at the ith node

- Grundlegende Gleichungen:

  - **Verkehrsflussgleichungen** (Verkehrsflussgleichgewicht):

$$\boldsymbol{\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_{ji}}\,, \quad \text{for } \boldsymbol{i = 1, \ldots, N}$$

    - ➤ Für geschlossene Netzwerke:

$$\boldsymbol{\lambda_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_{ji}}\,, \quad \text{for } \boldsymbol{i = 1, \ldots, N}$$

◆ **Besuchshäufigkeit** (Besuchsrate, relative Ankunftsrate):

$$e_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad \text{for } i = 1, \ldots, N$$

mit λ: Gesamtankunftsrate des Netzwerks

➤ Offene Netzwerke:

$$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{N} e_j p_{ji}, \quad \text{for } i = 1, \ldots, N$$

➤ Geschlossene Netzwerke:

$$e_i = \sum_{j=1}^{N} e_j p_{ji}, \quad \text{for } i = 1, \ldots, N$$

E.2 Leistungsgrößen

◆ **Zustandswahrscheinlichkeit**:

$$\pi(k_1, \ldots, k_N)$$

Wahrscheinlichkeit, Netz ist im Zustand $(k_1, \ldots, k_N)$

◆ **Randwahrscheinlichkeit** (P(k Aufträge im Knoten i)):

➤ Offene Netzwerke:

$$\pi_i(k) = \sum_{k_i = k} \pi(k_1, \ldots, k_N)$$

Normalisierungsbedingung:

$$\sum \pi(k_1, \ldots, k_N) = 1$$

- Geschlossene Netzwerke (Anzahl der Aufträge ist konstant):

$$\sum_{j=1}^{N} k_j = K \text{ with } (0 \leq k_j \leq K)$$

$$\pi_i(k) = \sum_{\substack{\sum_{j=1}^{N} k_j = K \\ \& \; k_i = k}} \pi(k_1, \ldots, k_N)$$

Normalisierungsbedingung:

$$\sum_{\sum_{j=1}^{N} k_j = K} \pi(k_1, \ldots, k_N) = 1$$

◆ **Auslastung** von Knoten i:

➤ $m_i = 1$:

$$\rho_i = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_i(k)$$

oder:

$$\rho_i = 1 - \pi_i(0)$$

➤ $m_i > 1$:

$$\rho_i = \frac{1}{m_i} \sum_{k=0}^{\infty} \min(m_i, k)\pi_i(k) = 1 - \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{m_i - k}{m_i} \cdot \pi_i(k)$$

oder:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{m_i \mu_i}$$

◆ **Durchsatz** durch Knoten *i*:

$$\lambda_i = m_i \cdot \rho_i \cdot \mu_i$$

➤ Wenn die Bedienrate abhängig ist von der Anzahl der Auftäge im Knoten (lastabhängiger Knoten):

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_i(k) \mu_i(k)$$

Beispiel für einen lastabhängigen Knoten $\rightarrow$ M/M/m-Knoten:

$$\mu_i(k) = \min(k, m_i) \cdot \mu_i$$

mit μ_i: Bedienrate einer einzelnen BE

◆ **Gesamtdurchsatz**:

➤ Offenes Netz:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{0i}$$

➤ Geschlossenes Netz:

$$\lambda = \frac{\lambda_i}{e_i}$$

◆ Mittlere **Anzahl der Aufträge** im Knoten i:

$$\overline{K}_i = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \pi_i(k)$$

mit Little's Gesetz:

$$\overline{K}_i = \lambda_i \cdot \overline{T}_i$$

◆ Mittlere **WS-Länge** von Knoten i:

$$\overline{Q}_i = \sum_{k=m_i}^{\infty} (k - m_i) \cdot \pi_i(k)$$

mit Little:

$$\overline{Q}_i = \lambda_i \overline{W}_i$$

◆ Mittlere **Antwortzeit** von Knoten i (mit Little):

$$\overline{T}_i = \frac{\overline{K}_i}{\lambda_i}$$

◆ Mittlere **Gesamtantwortzeit** (mit Little):

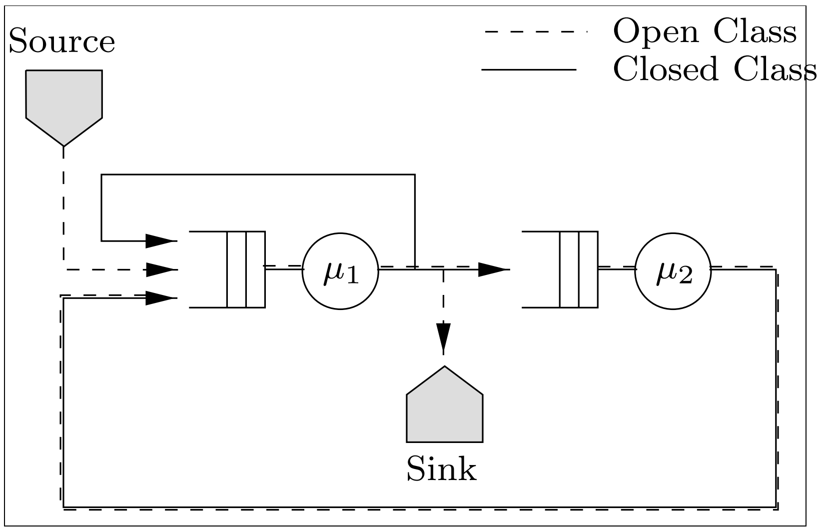
$$\overline{T} = \frac{\overline{K}}{\lambda}$$

◆ Mittlere **Wartezeit** von Knoten i:

$$\overline{W}_i = \overline{T}_i - \frac{1}{\mu_i}$$

E.3 WS-Netze mit mehreren Auftragsklassen

- Es sind gleichzeitig Aufträge **unterschiedlicher Klassen** im Netz
- Die Aufträge unterschiedlicher Klassen haben unterschiedliche **Bedienraten** und unterschiedliche **Übergangswahrscheinlichkeiten**
- Es gibt auch **gemischte** Netze mit offenen und geschlossenen Klassen:



1 Notation

$\boldsymbol{R}$ The number of job classes in a network

$\boldsymbol{k_{ir}}$ The number of jobs of the $\boldsymbol{r}$th class at the $\boldsymbol{i}$th node; for a closed network:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} k_{ir} = K \tag{0.1}$$

$\boldsymbol{K_r}$ The number of jobs of the $\boldsymbol{r}$th class in the network; not necessarily constant, even in a closed network:

$$\sum_{i=1}^{N} k_{ir} = K_r \tag{0.2}$$

$\mathbf{K}$ The number of jobs in the various classes, known as the population vector $(\mathbf{K} = (K_1, \ldots, K_R))$

$\mathbf{S}_i$ The state of the ith node ($\mathbf{S}_i = (k_{i1}, \dots, k_{iR})$):

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_i = \mathbf{K} \tag{0.1}$$

$\mathbf{S}$ The overall state of the network with multiple classes ($\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_N)$)

μ_{ir} The service rate of the ith node for jobs of the rth class

$p_{ir,js}$ The probability that a job of the rth class at the ith node is transferred to the sth class and the jth node (routing probability)

$p_{0,js}$ The probability in an open network that a job from outside the network enters the jth node as a job of the sth class

$p_{ir,0}$ The probability in an open network that a job of the rth class leaves the network after having been serviced at the ith node, so:

$$p_{ir,0} = 1 - \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{R} p_{ir,js} \tag{0.2}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ The overall arrival rate from outside to an open network

$\boldsymbol{\lambda_{0,ir}}$ The arrival rate from outside to node $\boldsymbol{i}$ for class $\boldsymbol{r}$ jobs ($\boldsymbol{\lambda_{0,ir} = \lambda \cdot p_{0,ir}}$)

$\boldsymbol{\lambda_{ir}}$ The arrival rate of jobs of the $\boldsymbol{r}$th class at the $\boldsymbol{i}$th node:

$$\boldsymbol{\lambda_{ir} = \lambda \cdot p_{0,ir} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{R} \lambda_{js} \cdot p_{js,ir} \, ;} \tag{0.1}$$

for closed networks, $\boldsymbol{p_{0,ir} = 0 \ (1 < i < N \, , \, 1 < r < R)}$ and we obtain:

$$\boldsymbol{\lambda_{ir} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{R} \lambda_{js} \cdot p_{js,ir} \, .} \tag{0.2}$$

The mean number of visits $\boldsymbol{e_{ir}}$ of a job of the $\boldsymbol{r}$th class at the $\boldsymbol{i}$th node of an open network can be determined from the routing probabilities:

$$\boldsymbol{e_{ir} = p_{0,ir} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{R} e_{js} p_{js,ir}}\,, \quad \text{for } \boldsymbol{i = 1, \ldots, N}\,, \ \boldsymbol{r = 1, \ldots, R}\,. \tag{0.1}$$

For closed networks, the corresponding equation is:

$$\boldsymbol{e_{ir} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{R} e_{js} p_{js,ir}}\,, \qquad \text{for } \boldsymbol{i = 1, \ldots, N}\,, \ \boldsymbol{r = 1, \ldots, R}\,. \tag{0.2}$$

Usually we assume that $\boldsymbol{e_{1r} = 1}$, for $\boldsymbol{r = 1, \ldots, R}$, although other settings are also possible.

2 Leistungsgrößen

◆ **Zustandswahrscheinlichkeit**:

$$\pi(\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_N)$$

Wahrscheinlichkeit, Netz ist im Zustand $(\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_N)$

◆ **Randwahrscheinlichkeit** (P(Knoten *i* ist im Zustand ***k***) = P(S_i = ***k***)):

➤ Offene Netze:

$$\pi_i(\mathrm{k}) = \sum_{s_i = k} \pi(\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_N)$$

➤ Geschlossene Netze:

$$\pi_i(\mathrm{k}) = \sum_{\substack{\sum_{j=1}^{N} \mathrm{S}_j = \mathrm{K} \\ \& \ \mathrm{S}_i = \mathrm{k}}} \pi(\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_N),$$

◆ **Auslastung** von Knoten i mit Aufträgen der Klasse r:

$$\rho_{ir} = \frac{1}{m_i} \sum_{\substack{\text{all states } \mathbf{k} \\ \text{with } k_r > 0}} \pi_i(\mathrm{k}) \frac{k_{ir}}{k_i} \min(m_i, k_i)\,, \quad k_i = \sum_{r=1}^{R} k_{ir}$$

oder:

$$\rho_{ir} = \frac{\lambda_{ir}}{m_i \mu_{ir}}$$

◆ **Durchsatz** von Knoten i mit Aufträgen der Klasse r:

$$\lambda_{ir} = \sum_{\substack{\text{all states } \mathbf{k} \\ \text{with } k_r > 0}} \pi_i(\mathbf{k}) \frac{k_{ir}}{k_i} \mu_i(k_i)$$

oder:

$$\lambda_{ir} = m_i \cdot \rho_{ir} \cdot \mu_{ir}$$

◆ **Gesamtdurchsatz** durch das Netz mit Aufträgen der Klasse r:

➤ Offenes Netz:

$$\lambda_r = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{0,ir}$$

➤ Geschlossenes Netz:

$$\lambda_r = \frac{\lambda_{ir}}{e_{ir}}$$

◆ Mittlere **Anzahl von Aufträgen** der Klasse *r* in Knoten *i*:

$$\overline{K}_{ir} = \sum_{\substack{\text{all states } \mathbf{k} \\ \text{with } k_r > 0}} k_r \cdot \pi_i(\mathbf{k})$$

Little:

$$\overline{K}_{ir} = \lambda_{ir} \cdot \overline{T}_{ir}$$

◆ Mittlere **WS-Länge** von Aufträgen der Klasse *r* in Knoten *i*:

$$\overline{Q}_{ir} = \lambda_{ir} \overline{W}_{ir}$$

- Mittlere **Antwortzeit** von Aufträgen der Klasse r bei Knoten i:

$$\overline{T}_{ir} = \frac{\overline{K}_{ir}}{\lambda_{ir}}$$

- Mittlere **Wartezeit** von Aufträgen der Klasse r bei Knoten i:

$$\overline{W}_{ir} = \overline{T}_{ir} - \frac{1}{\mu_{ir}}$$