E.4 Markovanalyse

- Das Verhalten vieler WS-Netze kann durch "Kontinuierliche Markov-Ketten" (Markov Chain, MK) beschrieben werden.

- Die MK wird charakterisiert durch die möglichen Zustände und die Übergangsraten zwischen diesen Zuständen des WS-Netzes

- Für WS-Netze im stationären Gleichgewicht gelten die Flussgleichungen:

$$\sum_{j \in S} \pi_j q_{ji} = \pi_i \sum_{j \in S} q_{ij} \, , \quad \forall i \in S$$

  - S: Zustandsraum (Menge aller Zustände des WS-Netzes)
  - q_{ij}: Übergangsrate vom Zustand i nach Zustand j
  - π_i: Zustandswahrscheinlichkeit für den Zustand i

- Anschauliche Interpretation:

  Summe der Übergangsraten **in** einen Zustand

  = Summe der Übergangsraten **aus** diesem Zustand

- Das Markov'sche Gleichungssystem kann umgeschrieben werden zu:

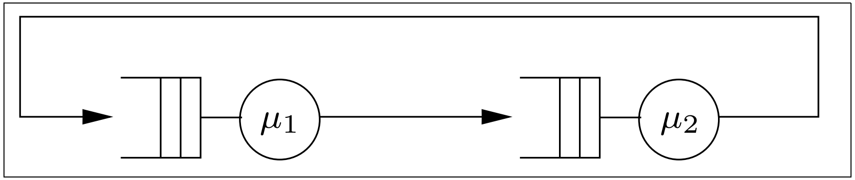
$$\forall i \in S: \quad \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} - \pi_i \sum_{j \neq i} q_{ij} = 0$$

- Oder in Matrixform:

$$\pi \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

  - π: Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$
  - $\mathbf{Q}$: Generatormatrix mit den Übergangsraten q_{ij} und $\quad q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$

◆ Beispiel: Geschlossenes Tandemnetzwerk

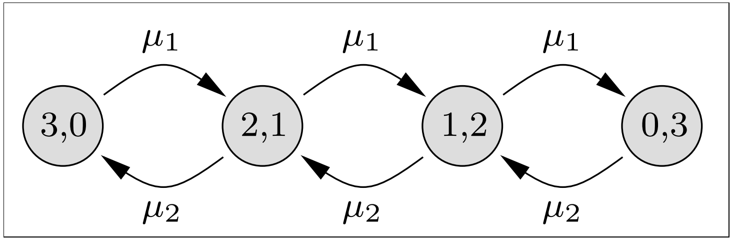


- Zahl der Aufträge $K = 3$
- Bedienzeiten exp. verteilt mit: $1/\mu_1 = 5$ sec und $1/\mu_2 = 2.5$ sec
- Strategie: FCFS
- Zustandsraum der MK:

$$\{(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\}$$

- Zustand: $(k_1, k_2) \rightarrow k_1$ Aufträge in Knoten 1 und k_2 Aufträge in Knoten 2
- Zustandswahrscheinlichkeit: $\pi(k_1, k_2)$

➤ Zustandsübergangsdiagramm oder Zustandsdiagramm:



➤ Flussgleichungen, Markov'sches Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\pi(3,0)\mu_1 &= \pi(2,1)\mu_2\,, \\
\pi(2,1)(\mu_1+\mu_2) &= \pi(3,0)\mu_1 + \pi(1,2)\mu_2\,, \\
\pi(1,2)(\mu_1+\mu_2) &= \pi(2,1)\mu_1 + \pi(0,3)\mu_2\,, \\
\pi(0,3)\mu_2 &= \pi(1,2)\mu_1\,.
\end{aligned}$$

➤ Generatormatrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_1+\mu_2) & \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_1+\mu_2) & \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu_2 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

➤ Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$\pi = (\pi(3,0), \pi(2,1), \pi(1,2), \pi(0,3))$$

- Generatormartrix mit $\mu_1 = 0.2$ und $\mu_2 = 0.4$:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

- Durch Lösung des Gleichungssystems $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ erhält man die Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$\pi(3,0) = \underline{0.5333}, \quad \pi(2,1) = \underline{0.2667}, \quad \pi(1,2) = \underline{0.1333}, \quad \pi(0,3) = \underline{0.0667}$$

- Und aus den Zustandswahrscheinlichkeiten die Randwahrscheinlichkeiten:

$$\pi_1(0) = \pi_2(3) = \pi(0,3) = \underline{0.0667}, \quad \pi_1(1) = \pi_2(2) = \pi(1,2) = \underline{0.133},$$
$$\pi_1(2) = \pi_2(1) = \pi(2,1) = \underline{0.2667}, \quad \pi_1(3) = \pi_2(0) = \pi(3,0) = \underline{0.5333}.$$

➤ Auslastungen:

$$\rho_1 = 1 - \pi_1(0) = \underline{0.9333}\,, \quad \rho_2 = 1 - \pi_2(0) = \underline{0.4667}\,.$$

➤ Durchsatz:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \rho_1\mu_1 = \rho_2\mu_2 = \underline{0.1867}\,.$$

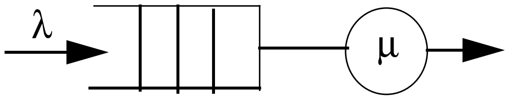
➤ Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\overline{K}_1 = \sum_{k=1}^{3} k\pi_1(k) = \underline{2.2667}\,, \quad \overline{K}_2 = \sum_{k=1}^{3} k\pi_2(k) = \underline{0.7333}\,.$$

➤ Mittlere Antwortzeit:

$$\overline{T}_1 = \frac{\overline{K}_1}{\lambda_1} = \underline{12.1429}\,, \quad \overline{T}_2 = \frac{\overline{K}_2}{\lambda_2} = \underline{3.9286}\,.$$

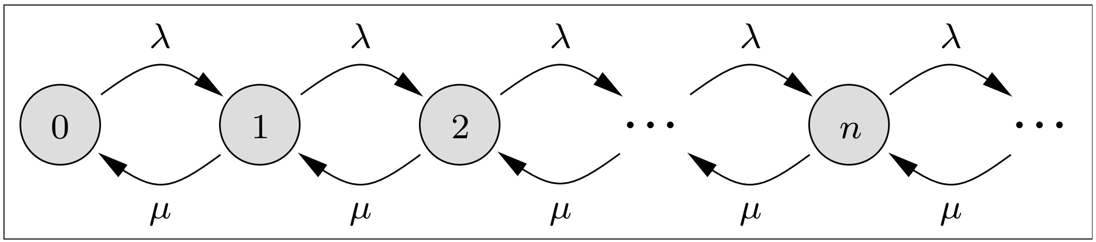
◆ Beispiel: M/M/1 - Wartesystem:



➤ Zustandsraum der MK:

{0, 1, 2, 3, 4, ... }

➤ Zustandsdiagramm:



➤ Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, ...)$$

➤ Generatormatrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

➤ Flussgleichungen, Markov'sches Gleichungssystem:

$$0 = -\pi_0\lambda + \pi_1\mu\,,$$
$$0 = -\pi_k(\lambda+\mu) + \pi_{k-1}\lambda + \pi_{k+1}\mu\,, \quad k \geq 1$$

➤ Für die ZW'n π_1 und π_2 erhält man:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0\,, \qquad \pi_2 = \frac{\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot \mu}\pi_0$$

➤ Und allgemein:

$$\pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0$$

➤ Mit der Normalisierungsbedingung:

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

➤ Mit der Auslastung $\rho = \lambda/\mu$:

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

➤ ZW'n eines M/M/1 - Wartesystems:

$$\pi_k = (1 - \rho)\rho^k$$

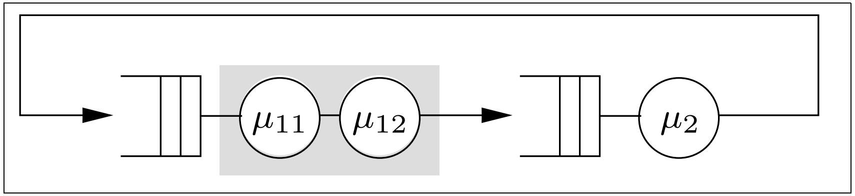
➤ Auslastung eines M/M/1 - Wartesystems:

$$\rho = 1 - \pi_0$$

➤ Mittlere Anzahl der Aufträge in einem M/M/1 - Wartesystem:

$$\overline{K} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

◆ Beispiel: Geschlossenes Tandemnetz mit einer E_2-verteilten BE:



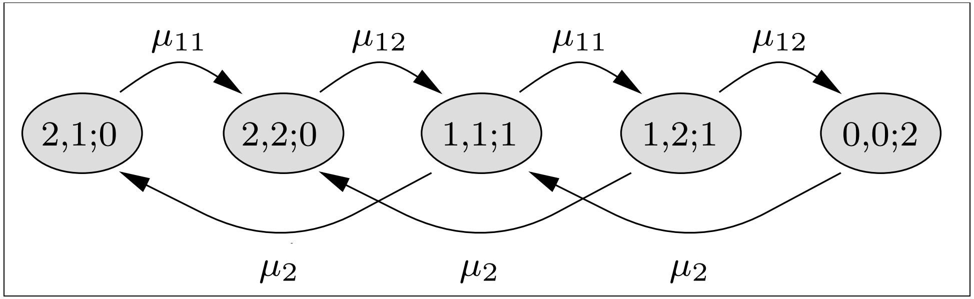
- ➤ Zahl der Aufträge: $K = 2$
- ➤ Bedienzeiten:
  - – BE_2: exp. verteilt mit $\mu_2 = 0.4$
  - – BE_1: E_2-verteilt mit den Raten der beiden Phasen $\mu_{11} = \mu_{12} = 0.4$
- ➤ Zustand des Netzes ist gegeben durch Anzahl der Aufträge in den Knoten, sondern auch durch die Phase $l = 0, 1, 2$ eines Auftrags in Knoten 1:

  $(k_1, l; k_2)$

- ➤ ZW des Netzes:

  $p(k_1, l; k_2)$

➤ Zustandsdiagramm:



➤ Flussgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\pi(2,1;0)\mu_{11} &= \pi(1,1;1)\mu_2\,, \\
\pi(2,2;0)\mu_{12} &= \pi(2,1;0)\mu_{11} + \pi(1,2;1)\mu_2\,, \\
\pi(1,1;1)(\mu_{11}+\mu_2) &= \pi(2,2;0)\mu_{12} + \pi(0,0;2)\mu_2\,, \\
\pi(1,2;1)(\mu_{12}+\mu_2) &= \pi(1,1;1)\mu_{11}\,, \\
\pi(0,0;2)\mu_2 &= \pi(1,2;1)\mu_{12}\,.
\end{aligned}
$$

➤ Generatormatrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mu_{11} & \mu_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_{12} & \mu_{12} & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(\mu_{11}+\mu_2) & \mu_{11} & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & -(\mu_{12}+\mu_2) & \mu_{12} \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

➤ Einsetzen der Werte für die Bedienraten:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & -0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & -0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & -0.4 \end{pmatrix}$$

➤ Lösung des Gleichungssystems $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ oder der Flussgleichungen ergibt für die ZW'n:

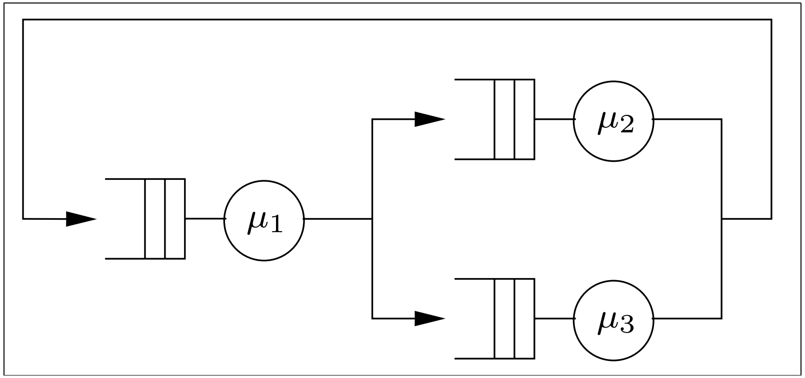
$$\begin{aligned}
\pi(2,1;0) &= \underline{0.2219}\,, \quad \pi(2,2;0) = \underline{0.3336}\,,\\
\pi(1,1;1) &= \underline{0.2219}\,, \quad \pi(1,2;1) = \underline{0.1102}\,,\\
\pi(0,0;2) &= \underline{0.1125}\,.
\end{aligned}$$

➤ Aus den ZW'n ergibt sich für die Randwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
\pi_1(0) = \pi_2(2) &= \pi(0,0;2) = \underline{0.1125}\,,\\
\pi_1(1) = \pi_2(1) &= \pi(1,1;1) + \pi(1,2;1) = \underline{0.3321}\,,\\
\pi_1(2) = \pi_2(0) &= \pi(2,1;0) + \pi(2,2;0) = \underline{0.5555}\,.
\end{aligned}$$

➤ Aus den Randwahrscheinlichkeiten können alle anderen Leistungsgrößen ermittelt werden.

◆ Beispiel: Einfaches Geschlossenes WS-Netzwerk:



- Zahl der Aufträge $K = 2$
- Bedienzeiten exp. verteilt mit: $\mu_1 = 4/\text{sec}$, $\mu_2 = 1/\text{sec}$ und $\mu_3 = 2/\text{sec}$
- Strategie: FCFS

➤ Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{12} = 0.4, \qquad p_{13} = 0.6$$

$$p_{21} = p_{31} = 1$$

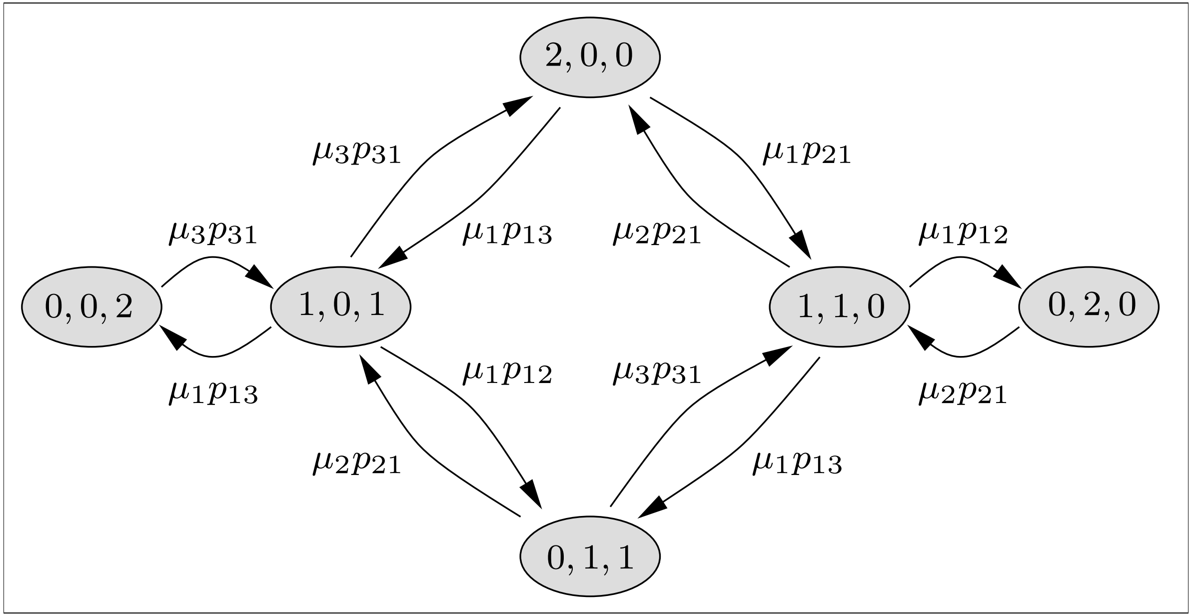
➤ Zustandsraum der MK:

$$\{(2, 0, 0),\ (0, 2, 0),\ (0, 0, 2),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 1),\ (0, 1, 1)\}$$

➤ Zustand: $(k_1, k_2, k_3) \rightarrow k_1$ Aufträge in Knoten 1, k_2 Aufträge in Knoten 2 und k_3 Aufträge in Knoten 3

➤ Zustandswahrscheinlichkeit: $\pi(k_1, k_2, k_3)$

➤ Zustandsdiagramm:



➤ Flussgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&(1) & \pi(2,0,0)(\mu_1 p_{12} + \mu_1 p_{13}) &= \pi(1,0,1)\mu_3 p_{31} + \pi(1,1,0)\mu_2 p_{21}\,, \\
&(2) & \pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} &= \pi(1,1,0)\mu_1 p_{12}\,, \\
&(3) & \pi(0,0,2)\mu_3 p_{31} &= \pi(1,0,1)\mu_1 p_{13}\,, \\
&(4) & \pi(1,1,0)(\mu_2 p_{21} + \mu_1 p_{13} + \mu_1 p_{12}) &= \pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} + \pi(2,0,0)\mu_1 p_{12} \\
& & &\quad + \pi(0,1,1)\mu_3 p_{31}\,, \\
&(5) & \pi(1,0,1)(\mu_3 p_{31} + \mu_1 p_{12} + \mu_1 p_{13}) &= \pi(0,0,2)\mu_3 p_{31} + \pi(0,1,1)\mu_2 p_{21} \\
& & &\quad + \pi(2,0,0)\mu_1 p_{13}\,, \\
&(6) & \pi(0,1,1)(\mu_3 p_{31} + \mu_2 p_{21}) &= \pi(1,1,0)\mu_1 p_{13} + \pi(1,0,1)\mu_1 p_{12}\,.
\end{aligned}
$$

Lösung des Markov'schen Gleichungssystems:

Iterative numerische Methode:

- Ursprüngliches Gleichungssytem: $\pi \mathbf{Q} = \mathbf{0}$
- Multiplikation mit einem Skalar: $\pi \mathbf{Q} \Delta = \mathbf{0}$
- Addition von π auf beiden Seiten: $\pi \mathbf{Q} \Delta + \pi = \pi$
- Mit der Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ **:** $\pi(\mathbf{Q}\Delta + \mathbf{I}) = \pi$
- Iteration: $\pi^{(j+1)} = \pi^{(j)}(\mathbf{Q}\Delta + \mathbf{I})$
- Δ wird so gewählt, dass das Verfahren konvergiert:

$$\Delta = 1/\max |q_{ii}| \quad \text{oder} \quad \Delta = 0.99/\max |q_{ii}|$$

◆ Beispiel Tandemnetzwerk:

➤ Generatormatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 & -0.4 \end{pmatrix}$$

➤ Skalar Δ:

$$\Delta = \frac{1}{\max |q_{ii}|} = \frac{1}{0.6} = \underline{1.6667}$$

➤ Invariante Matrix:

$$(Q\Delta + I) = \begin{pmatrix} 0.6667 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0.6667 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0.6667 & 0 & 0.3333 \\ 0 & 0 & 0.6667 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

➤ Startvektor kann willkürlich festgelegt werden:

$$\pi^{(0)} = (\pi(3,0), \pi(2,1), \pi(1,2), \pi(0,3))^{(0)}$$

Es muss aber die Normalisierungsbedingung erfüllt sein:

$$\pi(3,0) + \pi(2,1) + \pi(1,2) + \pi(0,3) = 1$$

➤ Als Startvektor wird gewählt:

$$\pi^{(0)} = (0.65; 0.35; 0; 0)$$

Iteration	$\pi(3,0)$	$\pi(2,1)$	$\pi(1,2)$	$\pi(0,3)$
1	0.6667	0.2166	0.1167	0
2	0.5889	0.3000	0.0722	0.0389
3	0.5926	0.2444	0.1259	0.0371
4	0.5580	0.2815	0.1062	0.0543
5	0.5597	0.2568	0.1300	0.0535
6	0.5443	0.2733	0.1213	0.0612
7	0.5450	0.2623	0.1319	0.0608
8	0.5382	0.2696	0.1280	0.0642
9	0.5385	0.2647	0.1327	0.0641
10	0.5355	0.2680	0.1309	0.0656
11	0.5356	0.2658	0.1330	0.0655

➤ Exakte Werte:

$$\pi(3,0) = \underline{0.5333}, \pi(2,1) = \underline{0.2667}, \pi(1,2) = \underline{0.1333}, \pi(0,3) = \underline{0.0667}$$

- Die iterative numerische Methode kann immer angewendet werden, benötigt aber sehr viel Rechenzeit und Speicherplatz

- Andere Methoden, die schneller sind und weniger Speicherplatz benötigen:
  - Stationäre Lösungsverfahren:
    - Powerverfahren
    - Jakobiverfahren
    - Gauß-Seidel-Verfahren
    - Multilevelverfahren
  - Transiente Lösungsverfahren:
    - Uniformization

Transiente Lösung der Markov'schen Gleichungen:

- Das Markov'sche Gleichungssystem: $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ gilt nur für den stationären (eingeschwungenen) Zustand

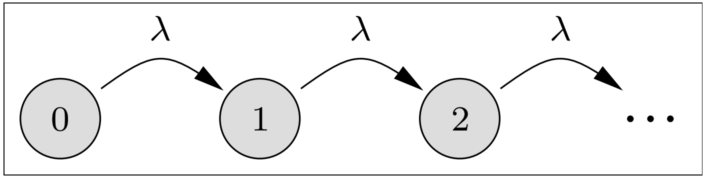
- Für den transienten (nichtstationären) Zustand gilt:

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}(t)}{dt} = \boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{Q}\,, \quad \boldsymbol{\pi}(0) = (\pi_0(0), \pi_1(0), \dots)$$

  - ➤ Im transienten Fall ergibt die Differenz zwischen dem "Fluss in einen Zustand" und dem "Fluss aus diesem Zustand" die Änderung (Ableitung) der Zustandswahrscheinlichkeit.

  - ➤ Nur für ganz einfache Fälle direkt zu lösen

◆ Beispiel: Geburtsprozess (z.B. Ankünfte bei einem Wartesystem):



➤ Generatormatrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

➤ Flussgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\pi_0(t) = -\lambda\pi_0(t)\,,$$
$$\frac{d}{dt}\pi_k(t) = -\lambda\pi_k(t) + \lambda\pi_{k-1}(t)\,, \quad k \geq 1$$

➤ Anfangsbedingungen:

$$\pi_k(0) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases}$$

➤ Zustandswahrscheinlichkeit des Geburtsprozesses (Poissonprozess):

$$\pi_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \geq 0$$

➤ Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit t k Geburten stattgefunden haben (k Aufträge angekommen sind)

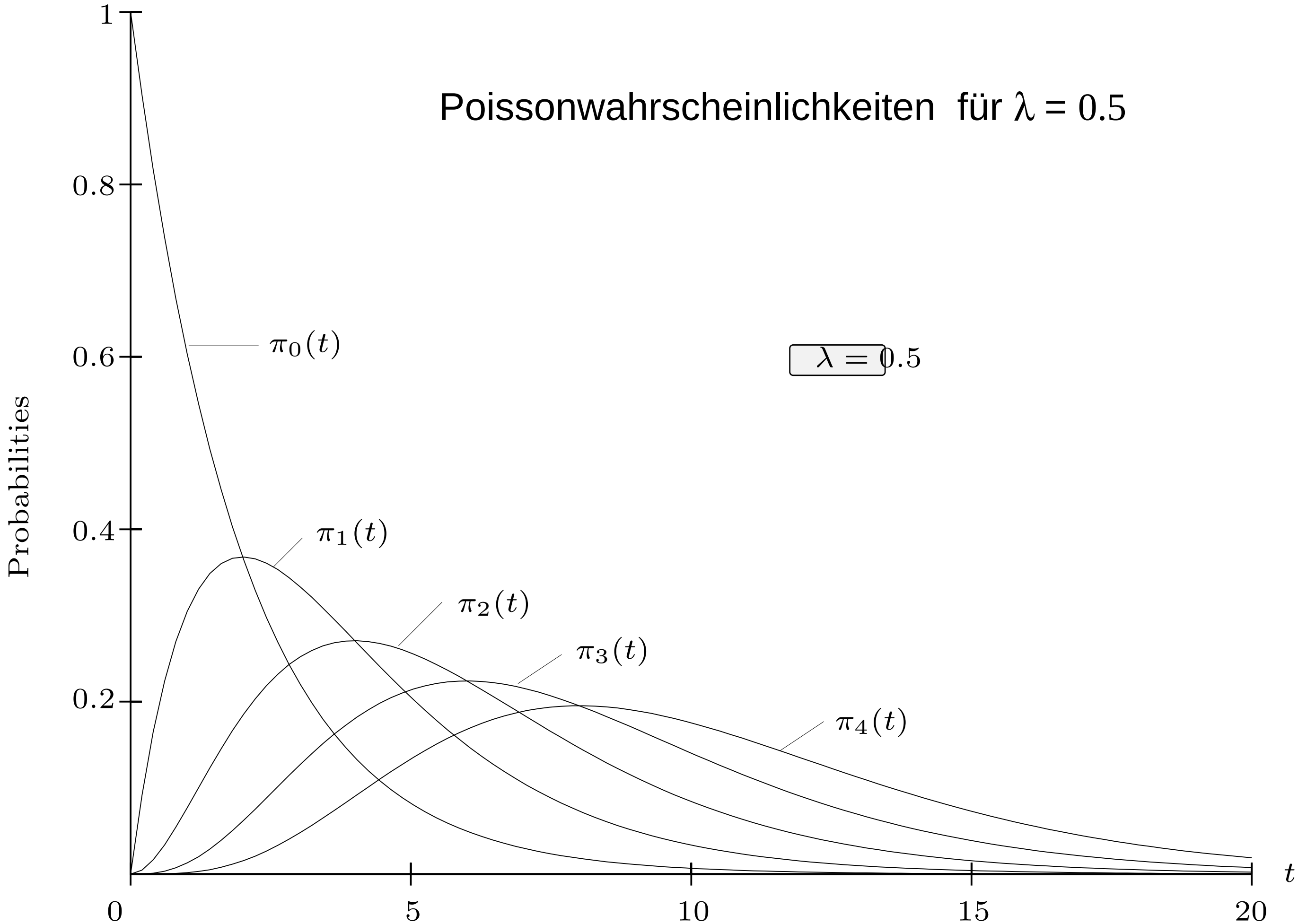
➤ Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit t keine Geburt (Ankunft) stattgefunden hat $P(T_A > t)$:

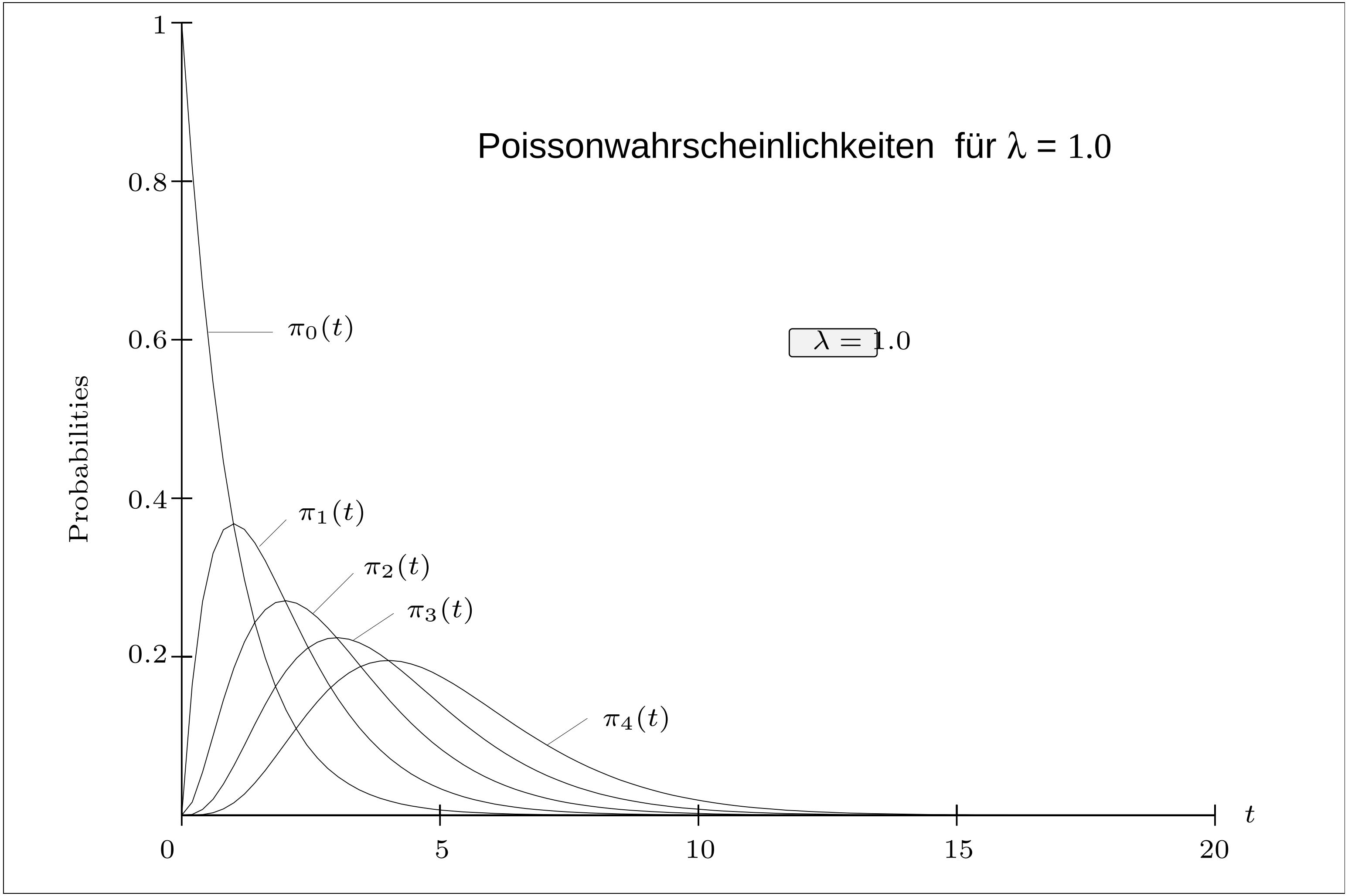
$$\pi_0(t) = e^{-\lambda t}$$

➤ Verteilung der Zeit zwischen zwei Ankünften:

$$P(T_A \leq t) = 1 - \pi_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

➤ Zwischenankunftszeit ist exp. verteilt !!


Poissonwahrscheinlichkeiten für λ = 0.5
$\lambda = 0.5$
Probabilities
$\pi_0(t)$
$\pi_1(t)$
$\pi_2(t)$
$\pi_3(t)$
$\pi_4(t)$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
5
10
15
20
t


Poissonwahrscheinlichkeiten für λ = 1.0
$\lambda = 1.0$
Probabilities
$\pi_0(t)$
$\pi_1(t)$
$\pi_2(t)$
$\pi_3(t)$
$\pi_4(t)$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
5
10
15
20
t