E.5 Produktformwarteschlangennetze

1 Globales Gleichgewicht - Lokales Gleichgewicht

- Die Flussgleichungen:

$$\forall i \in S : \quad \sum_{j \in S} \pi_j q_{ji} = \pi_i \sum_{j \in S} q_{ij}$$

oder:

$$\pi \cdot \mathbf{Q} = 0$$

mit der Normalisierungsbedingung:

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

werden auch **Globale Gleichgewichtsgleichungen** genannt.

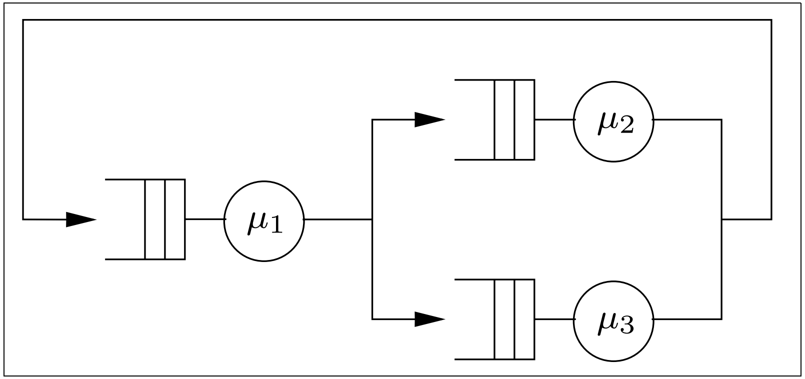
- **Globales** Gleichgewicht bedeutet:

  Die Übergangsrate **in** einen Zustand eines Warteschlangennetzes
  = Übergangsrate **aus** diesem Zustand des Warteschlangennetzes

- Für eine bestimmte Klasse von Warteschlangennetzen, den sog. **Produktformwarteschlangennetzen** existiert auch ein **Lokales** Gleichgewicht:

  Die Übergangsrate **in** einen Zustand eines Warteschlangennetzes aufgrund des Übergangs eines Auftrags **in den Knoten *n***
  = Übergangsrate **aus** diesem Zustand des Warteschlangennetzes aufgrund des Abgangs eines Auftrags **aus dem Knoten *n***

Beispiel: Geschlossenes WS-Netzwerk mit 3 Knoten:



- ➤ Zahl der Aufträge $K = 2$
- ➤ Bedienzeiten exp. verteilt mit: $\mu_1 = 4/\text{sec}$, $\mu_2 = 1/\text{sec}$ und $\mu_3 = 2/\text{sec}$
- ➤ Strategie: FCFS

➤ Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{12} = 0.4, \qquad p_{13} = 0.6$$

$$p_{21} = p_{31} = 1$$

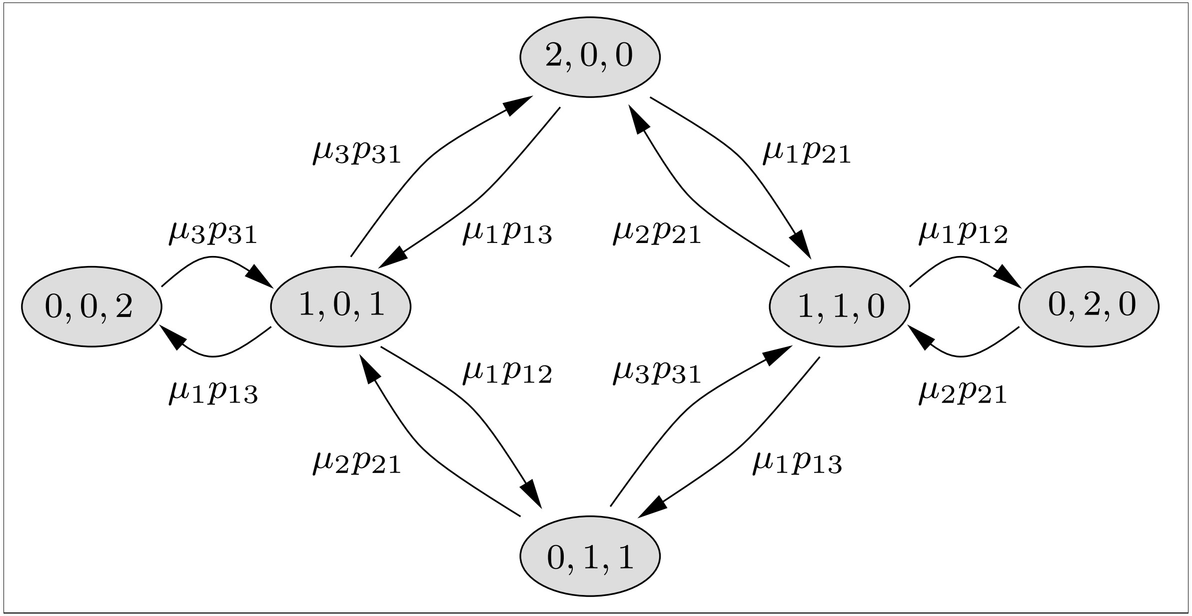
➤ Zustandsraum der MK:

$$\{(2, 0, 0),\ (0, 2, 0),\ (0, 0, 2),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 1),\ (0, 1, 1)\}$$

➤ Zustand: $(k_1, k_2, k_3) \rightarrow k_1$ Aufträge in Knoten 1, k_2 Aufträge in Knoten 2 und k_3 Aufträge in Knoten 3

➤ Zustandswahrscheinlichkeit: $\pi(k_1, k_2, k_3)$

- Zustandsdiagramm:



◆ Flussgleichungen = Globale Gleichgewichtsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
(1) \quad & \pi(2,0,0)(\mu_1 p_{12} + \mu_1 p_{13}) = \pi(1,0,1)\mu_3 p_{31} + \pi(1,1,0)\mu_2 p_{21}\,, \\
(2) \quad & \pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} = \pi(1,1,0)\mu_1 p_{12}\,, \\
(3) \quad & \pi(0,0,2)\mu_3 p_{31} = \pi(1,0,1)\mu_1 p_{13}\,, \\
(4) \quad & \pi(1,1,0)(\mu_2 p_{21} + \mu_1 p_{13} + \mu_1 p_{12}) = \pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} + \pi(2,0,0)\mu_1 p_{12} \\
& \qquad + \pi(0,1,1)\mu_3 p_{31}\,, \\
(5) \quad & \pi(1,0,1)(\mu_3 p_{31} + \mu_1 p_{12} + \mu_1 p_{13}) = \pi(0,0,2)\mu_3 p_{31} + \pi(0,1,1)\mu_2 p_{21} \\
& \qquad + \pi(2,0,0)\mu_1 p_{13}\,, \\
(6) \quad & \pi(0,1,1)(\mu_3 p_{31} + \mu_2 p_{21}) = \pi(1,1,0)\mu_1 p_{13} + \pi(1,0,1)\mu_1 p_{12}\,.
\end{aligned}
$$

◆ Lokale Gleichgewichtsgleichungen:

➤ Zustand: $(1, 1, 0)$

– Knoten 2

$$(4') \quad \boldsymbol{\pi(1,1,0)\cdot \mu_2\cdot p_{21} = \pi(2,0,0)\cdot \mu_1\cdot p_{12}}$$

– Knoten 1

$$(4'') \quad \pi(1,1,0)\cdot \mu_1\cdot (p_{13}+p_{12}) = \pi(0,1,1)\cdot \mu_3\cdot p_{31} + \pi(0,2,0)\cdot \mu_2\cdot p_{21}$$

Durch Addition der beiden lokalen Gleichgewichtsgleichungen (4') und (4'') erhält wieder die globale Gleichgewichtsgleichung (4) für den Zustand $(1, 1, 0)$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) sind schon lokale Gleichgewichtsgleichungen. Die Gleichungen (5) und (6) kann man entsprechend der Gleichung (4) in lokale Gleichgewichtsgleichungen aufspalten:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbf{5'}) & \pi(1,0,1)\mu_1(p_{12}+p_{13}) = \pi(0,1,1)\mu_2 p_{21} + \pi(0,0,2)\mu_3 p_{31}\ , \\
(\mathbf{5''}) & \pi(1,0,1)\mu_3 p_{31} = \pi(2,0,0)\mu_1 p_{13}\ , \\
(\mathbf{6'}) & \pi(0,1,1)\mu_2 p_{21} = \pi(1,0,1)\mu_1 p_{12}\ , \\
(\mathbf{6''}) & \pi(0,1,1)\mu_3 p_{31} = \pi(1,1,0)\mu_1 p_{13}\ ,
\end{array}
$$

$$\text{mit } (\mathbf{5'}) + (\mathbf{5''}) = (\mathbf{5}) \text{ und } (\mathbf{6'}) + (\mathbf{6''}) = (\mathbf{6})$$

➤ Aus den lokalen Gleichgewichtsgleichungen ergibt sich für die ZW'n:

$$\pi(1,0,1) = \pi(2,0,0)\frac{\mu_1}{\mu_3}p_{13}\,, \qquad \pi(1,1,0) = \pi(2,0,0)\frac{\mu_1}{\mu_2}p_{12}\,,$$

$$\pi(0,0,2) = \pi(2,0,0)\left(\frac{\mu_1}{\mu_3}p_{13}\right)^2\,, \qquad \pi(0,2,0) = \pi(2,0,0)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}p_{12}\right)^2\,,$$

$$\pi(0,1,1) = \pi(2,0,0)\frac{\mu_1^2}{\mu_2\mu_3}p_{12}p_{13}\,.$$

➤ Mithilfe der Normalisierungsbedingung ergibt sich:

$$\pi(2,0,0) = \left[1 + \mu_1\left(\frac{p_{13}}{\mu_3} + \frac{p_{12}}{\mu_2} + \frac{\mu_1 p_{13}^2}{\mu_3^2} + \frac{\mu_1 p_{12}^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_1 p_{12}p_{13}}{\mu_2\mu_3}\right)\right]^{-1}$$

➤ Und damit für die ZW'n:

$$\pi(2,0,0) = \underline{0.103}\,, \quad \pi(0,0,2) = \underline{0.148}\,, \quad \pi(1,0,1) = \underline{0.123}\,,$$
$$\pi(0,2,0) = \underline{0.263}\,, \quad \pi(1,1,0) = \underline{0.165}\,, \quad \pi(0,1,1) = \underline{0.198}\,.$$

➤ Aus den ZW'n lassen sich die Randwahrscheinlichkeiten und damit alle anderen Leistungsgrößen ermitteln.

➤ Die lokalen Gleichgewichtsgleichungen lassen sich viel einfacher lösen als die globalen Gleichgewichtsgleichungen.

➤ Aber die Lösung ist trotzdem für größere Netze noch sehr aufwendig, die Gleichungen werden zwar einfacher aber die Zahl der Gleichungen nimmt zu (Maximal: Zahl der Zustände · Zahl der Knoten)

Produktform:

- Für Netze mit der Eigenschaft des lokalen Gleichgewichts (Local-Balance-Property) existiert die sog. **Produktformlösung**:

$$\pi(k_1, k_2, \ldots, k_N) = \frac{1}{G}\,[\pi(k_1)\cdot\pi(k_2)\cdot\ldots\cdot\pi(k_N)]$$

➤ Die ZW für den Zustand $(k_1, k_2, \ldots, k_N)$ ist das Produkt aus den Randwahrscheinlichkeiten $\pi(k_1)$, $\pi(k_2)$, ... , $\pi(k_N)$ für die einzelnen Knoten

➤ Die Normalisierungskonstante G ergibt sich aus der Normalisierungsbedingung, dass die Summe aller ZW'n eins ergibt.

➤ WS-Netze mit der Eigenschaft des lokalen Gleichgewichts werden daher auch **Produktformwarteschlangennetze** genannt.

- Es kann gezeigt werden, dass WS-Netze, die nur Knoten der folgenden vier Typen enthalten die Eigenschaft des lokalen Gleichgewichts (Local-Balance-Property) besitzen:

Typ-1: **M/M/m-FCFS**,
wobei die Bedienraten fuer Auftraege verschiedener Klassen identisch sein muesssen. In der Praxis typische Beipiele fuer Typ-1 Knoten sind die E/A-Geraete, Platten- und Trommelspeicher.

Typ-2: **M/G/1-PS(RR)**.
Die CPU eines Rechensystems kann oft als Typ-2 Knoten modelliert werden.

Typ-3: **M/G/∞ (Infinite Server)**.
Terminals in einem Teilnehmerbetrieb koennen als Typ-3 Knoten modelliert werden.

Typ-4: **M/G/1-LCFS PR**.
Es gibt keine konkreten Beispiele fuer die Anwendung von Typ-4 Knoten in Rechensystemen.

2 Produktformlösungen

◆ Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Produktformlösungen:

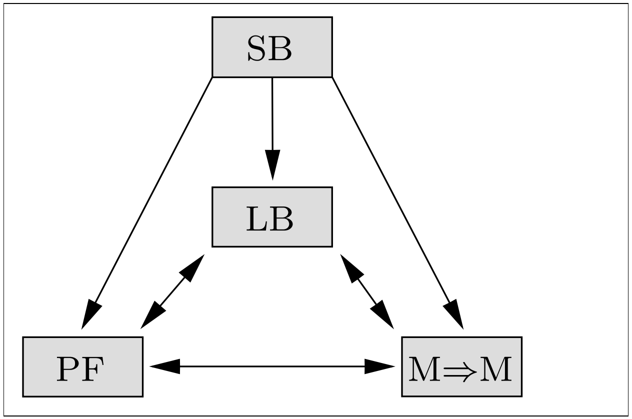
- **Local-balance-Eigenschaft:**
  Ein Netzwerk ist im lokalen Gleichgewicht genau dann, wenn die Rate mit der ein Zustand des Netzes aufgrund des Abgangs eines Auftrags aus einem Knoten verlassen wird, gleich derjenigen Rate ist, mit der dieser Zustand aufgrund des Uebergangs eines Auftrags in diesen Knoten wieder erreicht werden kann.

- **M $\longrightarrow$ M-Eigenschaft** (Markov impliziert Markov):
  Eine Bedienstation besitzt genau dann diese Eigenschaft, wenn sie einen Poissonschen Ankunftsprozess in einen Poissonschen Abgangsprozess transformiert. Es kann gezeigt werden, dass ein Netzwerk Produktformloesungen hat, wenn saemtliche Knoten des Netzes die M $\longrightarrow$ M-Eigenschaft besitzen.

◆ Hinreichende Bedingung für die Existenz von Produktformlösungen:

- **Station-balance-Eigenschaft:**
  Eine Warteschlangendisziplin erfuellt die Station-balance-Eigenschaft, wenn die Rate, mit der Auftraege in einer Position (sog. Station) der Warteschlange bedient werden, proportional zur Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Auftrag diese Position betritt. Mit anderen Worten, man unterteilt die Warteschlange eines Knotens in einzelne Positionen und setzt die Raten, mit denen diese Positionen betreten bzw. verlassen werden, gleich. Es kann gezeigt werden, dass Netze, welche die Station-balance-Eigenschaft erfuellen, Produktformloesungen besitzen. Die Umkehrung trifft jedoch nicht zu.

◆ Zusammenhang zwischen der Local-Balance-, der M $\rightarrow$ M-, der Station-Balance-Eigenschaft und der Produktformeigenschaft:



Jackson-Theorem für offene Netze:

- Gilt für offene Netze, die folgende Bedingungen erfüllen:
  - Im Netz befindet sich nur eine einzige Auftragsklasse.
  - Die Gesamtanzahl der Auftraege im Netz ist nicht beschraenkt.
  - Jeder der N Knoten des Netzes kann Ankuenfte von aussen haben mit exponentiell verteilten Zwischenankunftszeiten. Abg aenge von Auftraegen aus dem Netz sind bei jedem Knoten moeglich.
  - Saemtliche Bedienzeiten der Auftraege in den einzelnen Knoten sind exponentiell verteilt.
  - Die Warteschlangendisziplin bei allen Knoten ist FCFS.
  - Der i-te Knoten besteht aus $m_i \geq 1$ identischen Bedieneinheiten mit den Bedienraten μ_i, $i = 1, \ldots, N$. Die Bedienraten koennen, ebenso wie die Ankunftsraten λ_{0i}, von der Anzahl k_i der Auftraege im jeweiligen Knoten abhaengen. Man spricht dann auch von *lastabhaengigen Bedienraten* bzw. *lastabhaengigen Ankunftsraten*.

◆ Theorem von Jackson:

Wenn für alle Knoten $i = 1, \ldots, N$ im offenen Netz die Stabilitätsbedingung: $\lambda_i < m_i \cdot \mu_i$ erfüllt ist, dann ist die ZW des Netzes durch das Produkt der Randwahrscheinlichkeiten der einzelnen Knoten gegeben:

$$\pi(k_1, k_2, \ldots, k_N) = \pi_1(k_1) \cdot \pi_2(k_2) \cdot \ldots \cdot \pi_N(k_N)$$

➤ Die einzelnen Knoten des Netzes können somit als voneinander unabhängige M/M/m - Wartesysteme mit der Ankunftsraten λ_i und der Bedienraten μ_i angesehen werden, wobei die Ankunftsraten mithilfe der Verkehrsflussgleichungen berechnet werden können:

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_{ji}, \quad \text{for } i = 1, \ldots, N$$

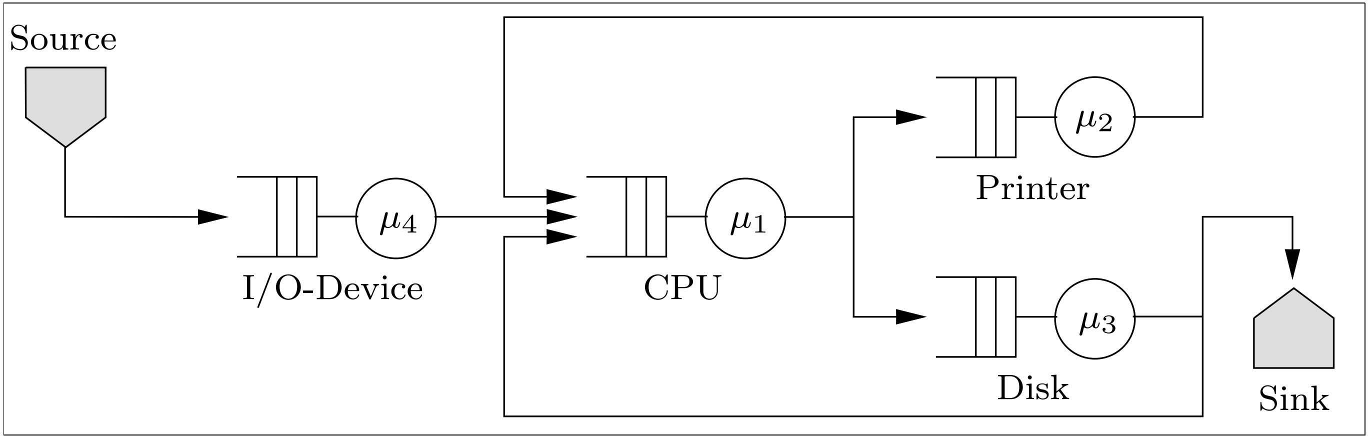
◆ Algorithmus der Jackson-Methode:

- ***Schritt*** 1: Berechne für alle Knoten $i = 1, \ldots, N$ des offenen Netzes die Ankunftsraten λ_i mit den Flussgleichungen.

- ***Schritt*** 2: Betrachte jeden Knoten als elementares Wartesystem. Überprüfe die Stabilitätsbedingung und bestimme die Randwahrscheinlichkeiten und die anderen Leistungsgrößen der Knoten mithilfe der Formeln für M/M/m - Wartesysteme.

- ***Schritt*** 3: Berechne aus den Randwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Knoten die ZW'n für das gesamte Netz.

◆ Beispiel:



- ➤ Anzahl der Knoten $N = 4$
- ➤ Bedienzeiten exp. verteilt mit: $1/\mu_1 = 0.04$, $1/\mu_2 = 0.03$, $1/\mu_3 = 0.06$, $1/\mu_4 = 0.05$
- ➤ Zwischenankunftszeiten exp. verteilt mit: $\lambda = \lambda_{04} = 4$ Aufträge/sec
- ➤ Strategie: FCFS
- ➤ Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{12} = p_{13} = 0.5, \quad p_{41} = p_{21} = 1, \quad p_{31} = 0.6, \quad p_{30} = 0.4$$

- ***Schritt*** 1: Ankunftsraten:

$$\lambda_1 = \lambda_2 p_{21} + \lambda_3 p_{31} + \lambda_4 p_{41} = \underline{20}\,, \quad \lambda_2 = \lambda_1 p_{12} = \underline{10}\,,$$
$$\lambda_3 = \lambda_1 p_{13} = \underline{10}\,, \quad \lambda_4 = \lambda_{04} = \underline{4}\,.$$

- ***Schritt*** 2: Leistungsgrößen:

  ➤ Auslastungen:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \underline{0.8}\,, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \underline{0.3}\,, \quad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \underline{0.6}\,, \quad \rho_4 = \frac{\lambda_4}{\mu_4} = \underline{0.2}\,.$$

  ➤ Stabilitätsbedingung $\rho_i < 1$ ist für alle Knoten erfüllt

  ➤ Mittlere Anzahl der Aufträge in den Knoten:

$$\overline{K}_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \underline{4}\,, \quad \overline{K}_2 = \underline{0.429}\,, \quad \overline{K}_3 = \underline{1.5}\,, \quad \overline{K}_4 = \underline{0.25}$$

➤ Mittlere Antwortzeiten:

$$\overline{T}_1 = \frac{1/\mu_1}{1-\rho_1} = \underline{0.2}\,, \quad \overline{T}_2 = \underline{0.043}\,, \quad \overline{T}_3 = \underline{0.15}\,, \quad \overline{T}_4 = \underline{0.0625}\,.$$

➤ Mittlere Gesamtantwortzeit (mithilfe des Little'schen Gesetzes):

$$\overline{T} = \frac{\overline{K}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{1=1}^{4}\overline{K}_i = \underline{1.545}\,.$$

➤ Mittlere Wartezeit:

$$\overline{W}_1 = \frac{\rho_1/\mu_1}{1-\rho_1} = \underline{0.16}\,, \quad \overline{W}_2 = \underline{0.013}\,, \quad \overline{W}_3 = \underline{0.09}\,, \quad \overline{W}_4 = \underline{0.0125}$$

➤ Mittlere Warteschlangenlänge:

$$\overline{Q}_1 = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} = \underline{3.2}\,, \quad \overline{Q}_2 = \underline{0.129}\,, \quad \overline{Q}_3 = \underline{0.9}\,, \quad \overline{Q}_4 = \underline{0.05}$$

➤ Randwahrscheinlichkeiten:

$$\pi_1(3) = (1-\rho_1)\rho_1^3 = \underline{0.1024}\,, \quad \pi_2(2) = (1-\rho_2)\rho_2^2 = \underline{0.063}\,,$$
$$\pi_3(4) = (1-\rho_3)\rho_3^4 = \underline{0.0518}\,, \quad \pi_4(1) = (1-\rho_4)\rho_4 = \underline{0.16}\,.$$

- ***Schritt*** 3: ZW'n für das Gesamtnetz:

$$\pi(3,2,4,1) = \pi_1(3)\cdot\pi_2(2)\cdot\pi_3(4)\cdot\pi_4(1) = \underline{0.0000534}$$

Gordon/Newell-Theorem für geschlossene Netze:

- Gilt für geschlossene Netze mit denselben Annahmen wie für das Jackson-Theorem aber mit $\lambda_{0i} = \lambda_{i0} = 0$ und:

$$K = \sum_{i=1}^{N} k_i$$

- Die Anzahl der möglichen Zustände ist begrenzt und es gilt für die Anzahl der Zustände:

$$\binom{N+K-1}{N-1}$$

◆ Gordon/Newell-Theorem:

Für geschlossene Produktformwarteschlangennetze gilt für die Zw'n:

$$\pi(k_1, \ldots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^{N} F_i(k_i)$$

➤ mit der Normalisierungskonstante:

$$G(K) = \sum_{\sum_{i=1}^{N} k_i = K} \prod_{i=1}^{N} F_i(k_i)$$

➤ Und den Funktionen $F_i\,(k_i)$:

$$F_i(k_i) = \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^{k_i} \cdot \frac{1}{\beta_i(k_i)}$$

mit:

$$\beta_i(k_i) = \begin{cases} k_i!\,, & k_i \le m_i\,, \\ m_i! \cdot m_i^{k_i - m_i}\,, & k_i \ge m_i\,, \\ 1\,, & m_i = 1\,. \end{cases}$$

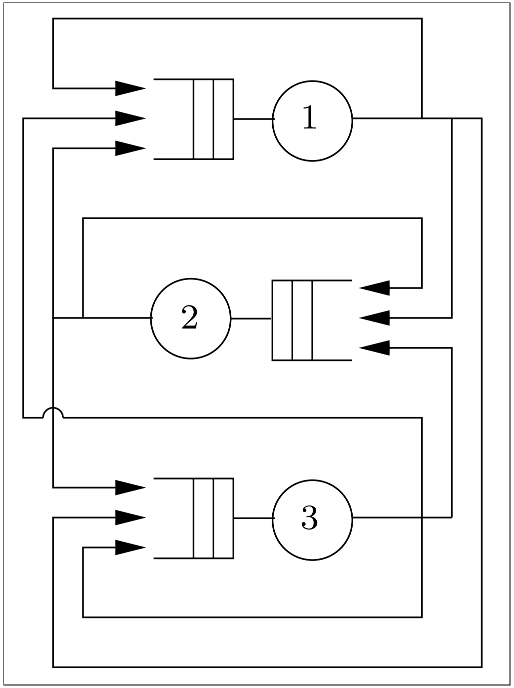
und:

$$e_i = \sum_{j=1}^{N} e_j p_{ji}\,, \quad \text{for } i = 1, \ldots, N$$

◆ Algorithmus der Gordon/Newell-Methode:

- ***Schritt*** 1: Berechne die Besuchshäufigkeiten e_i für alle Knoten i.
- ***Schritt*** 2: Berechne die Funktionen $F_i(k_i)$ für alle i = 1, ... , N.
- ***Schritt*** 3: Berechne die Normalisierungskonstante $G(K)$.
- ***Schritt*** 4: Berechne die ZW'n.
- ***Schritt*** 5: Berechne die Randwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Knoten aus den ZW'n.
- ***Schritt*** 6: Berechne alle interessierenden Leistungsgrößen aus den Randwahrscheinlichkeiten.

◆ Beispiel:



- Zahl der Aufträge $K = 3$
- Bedienzeiten exp. vert. mit $\mu_1 = 0.8/\text{sec}$, $\mu_2 = 0.6/\text{sec}$, $\mu_3 = 0.4/\text{sec}$
- Strategie: FCFS

➤ Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= 0.6\,, \quad & p_{21} &= 0.2\,, \quad & p_{31} &= 0.4\,,\\
p_{12} &= 0.3\,, \quad & p_{22} &= 0.3\,, \quad & p_{32} &= 0.1\,,\\
p_{13} &= 0.1\,, \quad & p_{23} &= 0.5\,, \quad & p_{33} &= 0.5\,.
\end{aligned}
$$

➤ Anzahl der Zustände:

$$\binom{N+K-1}{N-1} = 10$$

➤ Zustände:

$$
\begin{array}{lllll}
(3,0,0)\,, & (2,1,0)\,, & (2,0,1)\,, & (1,2,0)\,, & (1,1,1)\,,\\
(1,0,2)\,, & (0,3,0)\,, & (0,2,1)\,, & (0,1,2)\,, & (0,0,3)\,.
\end{array}
$$

- ***Schritt*** 1: Berechnung der Besuchshäufigkeiten:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= e_1 p_{11} + e_2 p_{21} + e_3 p_{31} = \underline{1}\,, \\
e_2 &= e_1 p_{12} + e_2 p_{22} + e_3 p_{32} = \underline{0.533}\,, \\
e_3 &= e_1 p_{13} + e_2 p_{23} + e_3 p_{33} = \underline{0.733}\,.
\end{aligned}
$$

- ***Schritt*** 2: Berechnung der Funktionen $F_i(k_i)$:

$$
\begin{aligned}
F_1(0) &= (e_1/\mu_1)^0 = \underline{1}\,, & F_1(1) &= (e_1/\mu_1)^1 = \underline{1.25}\,, \\
F_1(2) &= (e_1/\mu_1)^2 = \underline{1.5625}\,, & F_1(3) &= (e_1/\mu_1)^3 = \underline{1.953}\,,
\end{aligned}
$$

und entsprechend:

$$
\begin{aligned}
&F_2(0) = \underline{1}\,, \quad F_2(1) = \underline{0.889}\,, \quad F_2(2) = \underline{0.790}\,, \quad F_2(3) = \underline{0.702}\,, \\
&F_3(0) = \underline{1}\,, \quad F_3(1) = \underline{1.833}\,, \quad F_3(2) = \underline{3.361}\,, \quad F_3(3) = \underline{6.162}\,.
\end{aligned}
$$

- ***Schritt*** 3: Berechnung der Normalisierungskonstanten:

$$
\begin{aligned}
G(3) = \;& F_1(3)F_2(0)F_3(0) + F_1(2)F_2(1)F_3(0) + F_1(2)F_2(0)F_3(1) \\
&+ F_1(1)F_2(2)F_3(0) + F_1(1)F_2(1)F_3(1) + F_1(1)F_2(0)F_3(2) \\
&+ F_1(0)F_2(3)F_3(0) + F_1(0)F_2(2)F_3(1) + F_1(0)F_2(1)F_3(2) \\
&+ F_1(0)F_2(0)F_3(3) = \underline{24.733}\,.
\end{aligned}
$$

- ***Schritt*** 4: Berechnung der ZW'n:

$$\pi(3,0,0) = \frac{1}{G(3)} F_1(3)\cdot F_2(0)\cdot F_3(0) = \underline{0.079}\,,$$

$$\pi(2,1,0) = \frac{1}{G(3)} F_1(2)\cdot F_2(1)\cdot F_3(0) = \underline{0.056}\,.$$

und entsprechend:

$$\pi(2,0,1) = \underline{0.116}\,,\quad \pi(1,2,0) = \underline{0.040}\,,\quad \pi(1,1,1) = \underline{0.082}\,,\quad \pi(1,0,2) = \underline{0.170}\,,$$

$$\pi(0,3,0) = \underline{0.028}\,,\quad \pi(0,2,1) = \underline{0.058}\,,\quad \pi(0,1,2) = \underline{0.121}\,,\quad \pi(0,0,3) = \underline{0.249}\,.$$

- ***Schritt*** 5: Berechnung der Randwahrscheinlichkeiten:

$$\pi_1(0) = \pi(0,3,0) + \pi(0,2,1) + \pi(0,1,2) + \pi(0,0,3) = \underline{0.457}\,,$$
$$\pi_1(1) = \pi(1,2,0) + \pi(1,1,1) + \pi(1,0,2) = \underline{0.292}\,,$$
$$\pi_1(2) = \pi(2,1,0) + \pi(2,0,1) = \underline{0.172}\,,$$
$$\pi_1(3) = \pi(3,0,0) = \underline{0.079}\,,$$

$$\pi_2(0) = \pi(2,0,1) + \pi(1,0,2) + \pi(0,0,3) + \pi(3,0,0) = \underline{0.614}\,,$$
$$\pi_2(1) = \pi(2,1,0) + \pi(1,1,1) + \pi(0,1,2) = \underline{0.259}\,,$$
$$\pi_2(2) = \pi(1,2,0) + \pi(0,2,1) = \underline{0.098}\,,$$
$$\pi_2(3) = \pi(0,3,0) = \underline{0.028}\,,$$

$$\pi_3(0) = \pi(3,0,0) + \pi(2,1,0) + \pi(1,2,0) + \pi(0,3,0) = \underline{0.203}\,,$$
$$\pi_3(1) = \pi(2,0,1) + \pi(1,1,1) + \pi(0,2,1) = \underline{0.257}\,,$$
$$\pi_3(2) = \pi(1,0,2) + \pi(0,1,2) = \underline{0.291}\,,$$
$$\pi_3(3) = \pi(0,0,3) = \underline{0.249}\,.$$

- ***Schritt*** 6: Berechnung der Leistungsgrößen:
  - ➤ Auslastung:

$$\rho_1 = 1 - \pi_1(0) = \underline{0.543}\,, \quad \rho_2 = \underline{0.386}\,, \quad \rho_3 = \underline{0.797}$$

  - ➤ Mittlere Anzahl der Auftäge:

$$\overline{K}_1 = \sum_{k=1}^{3} k \cdot \pi_1(k) = \underline{0.873}\,, \quad \overline{K}_2 = \underline{0.541}, \quad \overline{K}_3 = \underline{1.585}$$

  - ➤ Durchsatz:

$$\lambda_1 = m_1 \rho_1 \mu_1 = \underline{0.435}\,, \quad \lambda_2 = \underline{0.232}\,, \quad \lambda_3 = \underline{0.319}$$

  - ➤ Antwortzeit:

$$\overline{T}_1 = \frac{\overline{K}_1}{\lambda_1} = \underline{2.009}\,, \quad \overline{T}_2 = \underline{2.337}\,, \quad \overline{T}_3 = \underline{4.976}$$

BCMP-Theorem:

- Gilt für WS-Netze, die folgende Bedingungen erfüllen:
  - Knotentypen:

$$\begin{array}{llll} \text{Type-1:} & \mathrm{M/M/m - FCFS} & \text{Type-2:} & \mathrm{M/G/1 - PS} \\ \text{Type-3:} & \mathrm{M/G/\infty\ (IS)} & \text{Type-4:} & \mathrm{M/G/1 - LCFS\ PR} \end{array}$$

  - Mehrere Auftragsklassen erlaubt
  - Bei FCFS müssen die Bedienraten der Knoten für alle Klassen identisch sein.
    Bei IS, PS und LCFS-PR können die Bedienraten der Knoten für verschiedene Klassen unterschiedlich sein
  - Die Bedienraten können auch lastabhängig (abhängig von der Anzahl der Aufträge) sein.
  - Gilt für offene, geschlossene und gemischte Netze
  - Theorem:

$$\pi(\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_N) = \frac{1}{G(\mathrm{K})} d(\mathrm{S}) \prod_{i=1}^{N} f_i(\mathrm{S}_i)$$

◆ Geschlossene WS-Netze mit mehreren Auftragsklassen:

➤ ZW'n:

$$\pi(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_N) = \frac{1}{G(\mathbf{K})} \prod_{i=1}^{N} F_i(\mathbf{S}_i)$$

➤ Normalisierungskonstante:

$$G(\mathbf{K}) = \sum_{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_i = \mathbf{K}} \prod_{i=1}^{N} F_i(\mathbf{S}_i)$$

➤ Funktionen $F_i(\mathbf{S}_i)$:

$$F_i(\mathbf{S}_i) = \begin{cases} k_i!\dfrac{1}{\beta_i(k_i)} \cdot \left(\dfrac{1}{\mu_i}\right)^{k_i} \cdot \displaystyle\prod_{r=1}^{R} \dfrac{1}{k_{ir}!} e_{ir}^{k_{ir}}\,, & \text{Type-1,} \\ k_i! \displaystyle\prod_{r=1}^{R} \dfrac{1}{k_{ir}!} \cdot \left(\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}\right)^{k_{ir}}\,, & \text{Type-2,4,} \\ \displaystyle\prod_{r=1}^{R} \dfrac{1}{k_{ir}!} \cdot \left(\dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}\right)^{k_{ir}}\,, & \text{Type-3.} \end{cases}$$

mit:

$$k_i = \sum_{r=1}^{R} k_{ir}$$

◆ Offene WS-Netze mit mehreren Auftragsklassen:

➤ ZW'n:

$$\pi(k_1, \ldots, k_N) = \prod_{i=1}^{N} \pi_i(k_i)$$

➤ Randwahrscheinlichkeiten:

$$\pi_i(k_i) = \begin{cases} (1-\rho_i)\rho_i^{k_i}\,, & \text{Type-1,2,4 } (m_i = 1), \\ e^{-\rho_i}\dfrac{\rho_i^{k_i}}{k_i!}\,, & \text{Type-3,} \end{cases}$$

mit:

$$k_i = \sum_{i=i}^{R} k_{ir}$$

➤ Auslastungen:

$$\boldsymbol{\rho_i = \sum_{r=1}^{R} \rho_{ir}}$$

$$\boldsymbol{\rho_{ir}} = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda_r \dfrac{e_{ir}}{\mu_i}}, & \text{Type-1 } (\boldsymbol{m_i = 1}), \\ \boldsymbol{\lambda_r \dfrac{e_{ir}}{\mu_{ir}}}, & \text{Type-2,3,4.} \end{cases}$$

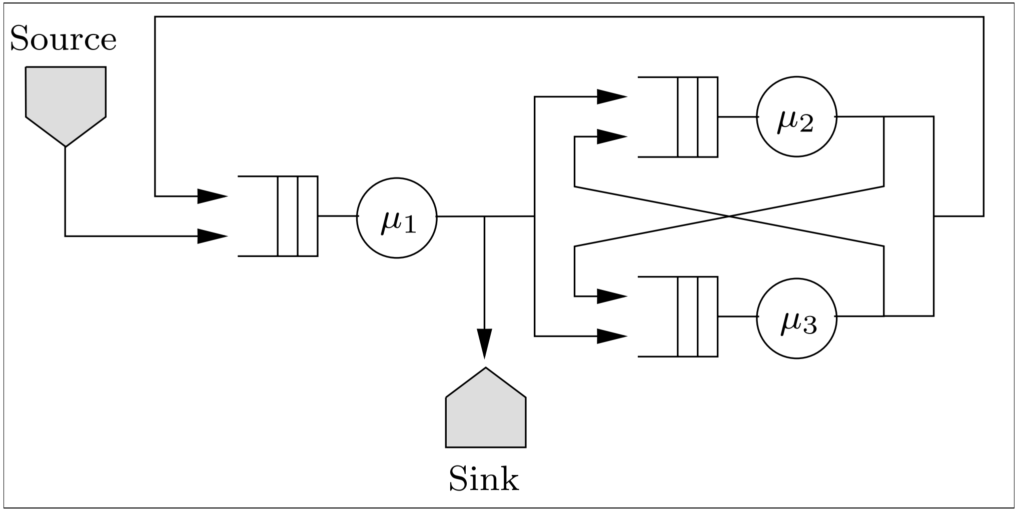
➤ Anzahl der Aufträge:

$$\boldsymbol{\overline{K}_{ir} = \frac{\rho_{ir}}{1 - \rho_i}}$$

◆ Algorithmus für das BCMP-Theorem für offene WS-Netze mit mehren Auftragsklassen:

- ***Schritt*** 1: Berechne die Besuchshäufigkeiten e_{ir} für alle Knoten i
- ***Schritt*** 2: Berechne die Auslastungen ρ_{ir} und ρ_i
- ***Schritt*** 3: Berechne die mittlere Anzahl der Aufträge $\overline{K}_{ir}$ und die anderen Leistungsgrößen
- ***Schritt*** 4: Berechne die Randwahrscheinlichkeiten
- ***Schritt*** 5: Berechne die ZW'n

◆ Beispiel



- ➤ Anzahl der Knoten $N = 3$
- ➤ Anzahl der Klassen $R = 2$
- ➤ Knoten 1: Typ-2
- ➤ Knoten 2 und 3: Typ-4

➤ Bedienzeiten exp. verteilt mit den Raten:

$$\mu_{11} = 8\,\sec^{-1}, \quad \mu_{21} = 12\,\sec^{-1}, \quad \mu_{31} = 16\,\sec^{-1},$$
$$\mu_{12} = 24\,\sec^{-1}, \quad \mu_{22} = 32\,\sec^{-1}, \quad \mu_{32} = 36\,\sec^{-1}.$$

➤ Zwischenankunftszeiten exp. verteilt mit den Raten:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \text{Auftraege/sec}$$

➤ Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\begin{array}{llll}
p_{0,11} = 1, & p_{21,11} = 0.6, & p_{0,12} = 1, & p_{22,12} = 0.7, \\
p_{11,21} = 0.4, & p_{21,31} = 0.4, & p_{12,22} = 0.3, & p_{22,32} = 0.3, \\
p_{11,31} = 0.3, & p_{31,11} = 0.5, & p_{12,32} = 0.6, & p_{32,12} = 0.4, \\
p_{11,0} = 0.3, & p_{31,21} = 0.5, & p_{12,0} = 0.1, & p_{32,22} = 0.6,
\end{array}$$

- ***Schritt*** 1: Berechnung der Besuchshäufigkeiten:

$$e_{11} = p_{0,11} + e_{11}p_{11,11} + e_{21}p_{21,11} + e_{31}p_{31,11} = \underline{\mathbf{3.333}}\,,$$
$$e_{21} = p_{0,21} + e_{11}p_{11,21} + e_{21}p_{21,21} + e_{31}p_{31,21} = \underline{\mathbf{2.292}}\,,$$
$$e_{31} = p_{0,31} + e_{11}p_{11,31} + e_{21}p_{21,31} + e_{31}p_{31,31} = \underline{\mathbf{1.917}}\,.$$

entsprechend:

$$e_{12} = \underline{\mathbf{10}}, \quad e_{22} = \underline{\mathbf{8.049}}, \quad e_{32} = \underline{\mathbf{8.415}}$$

- ***Schritt*** 2: Berechnung der Auslastungen:

$$\rho_1 = \lambda_1 \frac{e_{11}}{\mu_{11}} + \lambda_2 \frac{e_{12}}{\mu_{12}} = \rho_{11} + \rho_{12} = \underline{\mathbf{0.833}}\,,$$
$$\rho_2 = \lambda_1 \frac{e_{21}}{\mu_{21}} + \lambda_2 \frac{e_{22}}{\mu_{22}} = \rho_{21} + \rho_{22} = \underline{\mathbf{0.442}}\,,$$
$$\rho_3 = \lambda_1 \frac{e_{31}}{\mu_{31}} + \lambda_2 \frac{e_{32}}{\mu_{32}} = \rho_{31} + \rho_{32} = \underline{\mathbf{0.354}}\,.$$

- ***Schritt*** 3: Berechnung der mittleren Anzahl der Aufträge:

$$\overline{K}_{11} = \frac{\rho_{11}}{1-\rho_1} = \underline{2.5}, \quad \overline{K}_{21} = \frac{\rho_{21}}{1-\rho_2} = \underline{0.342}, \quad \overline{K}_{31} = \frac{\rho_{31}}{1-\rho_3} = \underline{0.186},$$

$$\overline{K}_{12} = \underline{2.5}, \quad \overline{K}_{22} = \underline{0.5}, \quad \overline{K}_{32} = \underline{0.362}.$$

- ***Schritt*** 4: Berechnung der Randwahrscheinlichkeiten:

$$\pi_1(3) = (1-\rho_1)\rho_1^3 = \underline{0.0965}, \quad \pi_2(2) = (1-\rho_2)\rho_2^2 = \underline{0.1093},$$
$$\pi_3(1) = (1-\rho_3)\rho_3 = \underline{0.2287}.$$

- ***Schritt*** 5: Berechnung der ZW'n:

$$\pi(3,2,1) = \pi_1(3)\cdot\pi_2(2)\cdot\pi_3(1) = \underline{0.00241}$$