

F Optimierung

◆ Optimierungsziele:

- Kostenminimierung bei gegebenem Durchsatz
- Durchsatzmaximierung bei festen Kosten
- Minimierung der Antwortzeit bei festen Kosten

◆ Entscheidungsparameter:

- Parameter, die geändert werden können um optimales Ergebnis zu erzielen
- Bei Rechensystemen häufig Bedienraten

◆ Kostenfunktionen:

- Lineare Kostenfunktion (c_i = Kostenfaktor für die Bedienrate μ_i):

$$C(\mu) = \sum_{i=1}^N c_i \mu_i = \text{COST}$$

- Nichtlineare Kostenfunktion:

$$C(\mu) = \sum_{i=1}^N c_i \mu_i^{\alpha_i} = \text{COST}, \quad \alpha_i > 1$$

- Kostenfunktion mit Berücksichtigung der Speicherkosten $C(K)$:

$$C(\mu, K) = C(K) + \sum_{i=1}^N c_i \mu_i^{\alpha_i} = \text{COST}$$

■ Optimierung mithilfe der Summationsmethode:

◆ Grundgleichung der Summationsmethode:

$$f_i(\lambda_i) = \bar{K}_i = \begin{cases} \frac{\rho_i}{1 - \frac{K-1}{K}\rho_i}, & \text{Type-1,2,4 } (m_i = 1), \\ \frac{\lambda_i}{\mu_i}, & \text{Type-3.} \end{cases}$$

► Umgewandelt für Optimierung:

$$\bar{K}_i(\lambda, \mu_i) = f_i(\lambda, \mu_i) = \begin{cases} \frac{\lambda e_i}{\mu_i - \lambda e_i}, & \text{Type-1, 2, 4, and } m_i = 1, \\ \frac{\lambda e_i}{\mu_i}, & \text{Type-3 IS.} \end{cases}$$

- Systemgleichung:

$$\sum_{i=1}^N f_i(\lambda, \mu_i) = \sum_{\neq \text{IS}} \frac{\lambda e_i}{\mu_i - \lambda e_i} + \sum_{\text{IS}} \frac{\lambda e_i}{\mu_i} = K .$$

- Ergebnisse approximativ, da Systemgleichung approximativ!

◆ Maximierung des Durchsatzes λ bei linearer Kostenfunktion:

➤ Lagrangefunktion (y_1, y_2 : Lagrange Multiplier):

$$L(\lambda, \mu_1, \dots, \mu_N, y_1, y_2) = \lambda + y_1 \left(\sum_{i=1}^N c_i \mu_i - \text{COST} \right) + y_2 \left(\sum_{\neq \text{IS}} \frac{\lambda e_i}{\mu_i - \lambda e_i} + \sum_{\text{IS}} \frac{\lambda e_i}{\mu_i} - K \right)$$

➤ Die optimalen Werte erhält man durch Ableitung nach λ, μ_i, y_1, y_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial y_1} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, N, & \frac{\partial L}{\partial y_2} &= 0. \end{aligned}$$

- Lösung des Gleichungssystems:
- Maximaler Durchsatz und optimale Bedienraten:

$$\lambda^* = \frac{\text{COST} \cdot K}{\left(\sum_{i=1}^N \sqrt{c_i e_i} \right)^2 + K \sum_{i \neq \text{IS}} c_i e_i},$$

$$\mu_i^* = \begin{cases} \lambda^* \cdot e_i \left(\frac{\sum_{j=1}^N \sqrt{e_j c_j}}{K \sqrt{e_i c_i}} + 1 \right), & \text{type } i \neq \text{IS}, \\ \lambda^* \cdot e_i \left(\frac{\sum_{j=1}^N \sqrt{e_j c_j}}{K \sqrt{e_i c_i}} \right), & \text{type } i = \text{IS}. \end{cases}$$

◆ Minimierung der Kosten bei linearer Kostenfunktion:

► Optimale Bedienraten:

$$\mu_i^* = \begin{cases} \lambda e_i \left(\frac{\sum_{j=1}^N \sqrt{e_j c_j}}{K \sqrt{e_i}} + 1 \right), & \text{type } i \neq \text{IS}, \\ \lambda e_i \left(\frac{\sum_{j=1}^N \sqrt{e_j c_j}}{K \sqrt{e_i}} \right), & \text{type } i = \text{IS}. \end{cases}$$

► Minimale Kosten:

$$C^*(\mu) = \sum_{i=1}^N \mu_i^* c_i .$$

◆ Minimierung der Kosten bei nichtlinearer Kostenfunktion:

➤ Initialisierung:

$$\mu_i = 1, \text{ for } i = 1, \dots, N$$

➤ Iteration:

$$y = \lambda \cdot \left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^N \sqrt{\alpha_i c_i e_i \mu_i^{\alpha_i - 1}} \right)^2 ,$$

$$\mu_i = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda y e_i}{\alpha_i c_i \mu_i^{\alpha_i - 1}}} + \lambda e_i, & \text{type } i \neq \text{IS}, \\ \left(\frac{\lambda y e_i}{\alpha_i c_i} \right)^{\frac{1}{\alpha_i - 1}} & \text{type } i = \text{IS}. \end{cases}$$

◆ Beispiel: Geschlossenes Produktform-WS-Netz,
Maximierung des Durchsatz, Lineare Kostenfunktion

- $K = 20$
- $N = 5$
 - 3 M/M/1-FCFS
 - 2 M/G/ ∞ -IS
- Besuchshäufigkeiten:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 0.2, \quad e_3 = e_4 = 0.5, \quad e_5 = 0.3.$$

- Kostenkoeffizienten:

$$c_1 = 10, \quad c_2 = c_3 = 5, \quad c_4 = 2, \quad c_5 = 1.$$

- Kostenbeschränkung:

$$\text{COST} = 100$$

► Ergebnisse: $\lambda^* = 6.189$; $\lambda_{\text{MVA}} = 6.569$

$$\mu_1^* = 6.189, \mu_2^* = 1.689, \mu_3^* = 3.812, \mu_4^* = 1.096, \mu_5^* = 1.236,$$

► 3 weitere Beispiele:

	Example 1		Example 2		Example 3	
	BFS Method	Complex Method	BFS Method	Complex Method	BFS Method	Complex Method
μ_1^*	6.90	6.81	8.07	7.97	3.04	3.00
μ_2^*	1.69	1.65	1.30	1.41	0.66	0.69
μ_3^*	3.81	3.99	2.83	2.95	1.27	0.80
μ_4^*	1.13	1.01	0.90	0.93	0.59	0.79
μ_5^*	1.24	1.50	1.10	1.13	0.67	0.84
λ_{BFS}^*	6.19	6.56	6.66	7.56	2.63	2.95
λ_{MVA}	6.57	6.55	7.54	7.57	3.00	2.97
COST	100.00	99.81	100.00	99.97	100.00	100.00

► Nichtlineare Kostenfunktion:

α	1	1.25	1.5	2.0	2.5	3
μ_1^*	6.912	4.911	3.884	2.860	2.361	2.067
μ_2^*	1.689	1.242	1.017	0.806	0.716	0.674
μ_3^*	3.182	2.727	2.173	1.625	1.363	1.214
μ_4^*	1.096	0.921	0.821	0.735	0.706	0.704
μ_5^*	1.236	0.998	0.883	0.781	0.774	0.732
λ_{BFS}^*	6.189	4.438	3.532	2.625	2.180	1.918
λ_{MVA}^*	6.596	4.711	3.752	2.790	2.319	2.039

■ Optimierung mithilfe des Faltungsalgorithmus:

◆ Maximierung des Durchsatzes:

➤ Faltungsalgorithmus und BCMP-Theorem:

$$\lambda(\mu, K) = \frac{G(\mu, K - 1)}{G(\mu, K)}$$

$$G(\mu, K) = \sum_{\substack{\mathbb{P}^N \\ k_i = K \\ i=1}} \prod_{i=1}^N F_i(k_i)$$

$$F_i(k_i) = \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^{k_i} \cdot \frac{1}{\beta_i(k_i)} \quad \beta_i(k_i) = \begin{cases} k_i! , & k_i \leq m_i , \\ m_i! m_1^{k_i - m_i} , & k_i \geq m_i , \\ 1 , & m_i = 1 . \end{cases}$$

- Kostenfunktion:

$$C(\mu, K) = C(K) + \sum_{i=1}^N c_i \mu_i^{\alpha_i} = \text{COST}$$

- Lagrangefunktion:

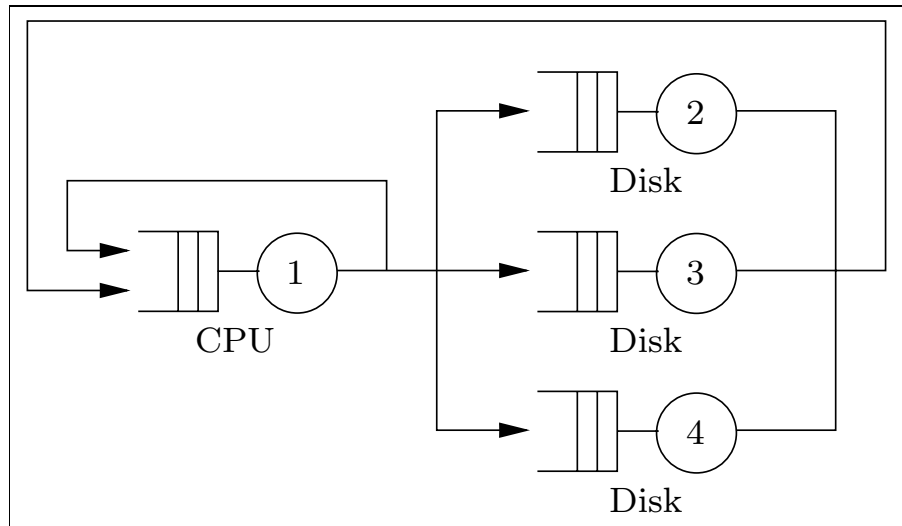
$$L(\mu, y, K) = \lambda(\mu, K) + y \left(C(K) - \text{COST} + \sum_{i=1}^N c_i \mu_i^{\alpha_i} \right)$$

- Ableitung:

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

- Ableitung und Lösung des linearen Gleichungssystems ist sehr aufwendig, z.B. mithilfe der Computer Algebra (MAPLE o.ä)
- Beispiel:



- Parameter: $\text{COST} = 500$; $C(K) = C_m K$; $C_m = 5$
- Kostenkoeffizienten und Exponenten:

	c_i	α_i
CPU	131.9	0.55
Disk ₁	11.5	1.00
Disk ₂	54.2	0.67
Disk ₂	54.2	0.67

- Ergebnisse:

K	λ^*	μ_1^*	μ_2^*	μ_3^*	μ_4^*
1	0.071	3.090	4.240	2.054	1.376
2	0.091	2.819	3.373	1.525	1.032
3	0.089	2.356	2.684	1.238	0.752
4	0.076	1.967	1.979	0.847	0.571
5	0.059	1.557	1.084	0.598	0.431